Soluciones del examen - Sucesiones y series numéricas

Curso: Universidad 1 · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

Criterios. Se valora identificar la indeterminación y aplicar la técnica adecuada a cada límite.

a. Dividiendo por n^2: $\frac{1}{4}$. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: $\frac{1-3/n^2}{4+1/n} \to \frac{1}{4}$.

b. 1^∞: $\left[\left(1+\frac{1}{-n/3}\right)^{-n/3}\right]^{-6} \to e^{-6}$. Indeterminación 1^∞. Se usa $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$ con $a_n = -\frac{n}{3} \to -\infty$, y el exponente es $2n = -6 \cdot \left(-\frac{n}{3}\right)$. También: $e^{\lim 2n\cdot(-3/n)} = e^{-6}$.

c. $\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \to 0$. Indeterminación $\infty - \infty$: se multiplica y divide por el conjugado; el numerador queda $(n+3) - n = 3$ y el denominador tiende a infinito.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

Criterios. Se valora reconocer la serie geométrica o telescópica y calcular su suma con las sumas parciales.

a. Geométrica de razón $-\frac{1}{2}$: $\frac{3}{1+1/2} = 2$. Primer término 3 y razón $r = -\frac{1}{2}$, con $|r| < 1$, así que la serie converge a $\frac{3}{1-r}$.

b. $\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$; telescópica: $S_N = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \to \frac{3}{2}$. Fracciones simples: $\frac{2}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$ con $A = 1$ y $B = -1$. Al sumar se cancelan todos los términos salvo 1, $\frac{1}{2}$ y los dos últimos negativos, que tienden a 0.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

Criterios. Se valora elegir y aplicar correctamente el criterio de convergencia en cada serie.

a. Cociente: $\frac{3}{n+1} \to 0$: converge. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}n!}{(n+1)!\,3^n}$, con límite $0 < 1$.

b. Comparación en el límite con $\sum \frac{1}{n}$ (cociente $\to 1$): diverge. $\frac{n/(n^2+1)}{1/n} = \frac{n^2}{n^2+1} \to 1$; como la serie armónica diverge, esta también.

c. Leibniz: $\frac{1}{\sqrt{n}}$ decrece a 0, converge; pero $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge: condicionalmente convergente. Para la absoluta, es una serie p con $p = \frac{1}{2} \leq 1$.

Solución del ejercicio 4 (5 puntos)

Criterios. Se valora la recurrencia, la suma geométrica y la interpretación del nivel de equilibrio.

a. $a_{n+1} = 0{,}25a_n + 20$. Tras cada inyección queda el 25 % de lo anterior más 20 unidades nuevas.
b. $a_2 = 25$, $a_3 = 26{,}25$. $a_2 = 0{,}25 \cdot 20 + 20 = 25$ y $a_3 = 0{,}25 \cdot 25 + 20 = 26{,}25$.
c. $a_n = 20(1 + 0{,}25 + \cdots + 0{,}25^{n-1}) = 20 \cdot \frac{1-0{,}25^n}{0{,}75}$. Desarrollando la recurrencia: $a_n = 20 + 0{,}25 \cdot 20 + \cdots + 0{,}25^{n-1} \cdot 20$. Comprobación con $n = 2$: $20 \cdot \frac{1-0{,}0625}{0{,}75} = 25$.
d. $\frac{20}{0{,}75} = \frac{80}{3} \approx 26{,}67$ unidades. Como $0{,}25^n \to 0$, $a_n \to \frac{20}{0{,}75}$; también sale del punto fijo $L = 0{,}25L + 20$. El nivel se estabiliza en unas 26,7 unidades.

Solución del ejercicio 5 (3 puntos)

Criterios. Se valora la demostración por inducción, la monotonía y el cálculo del límite como punto fijo.

a. $a_1 = 0 < 6$; si $a_n < 6$, $a_{n+1} < \frac{12}{2} = 6$. Base: $a_1 = 0$. Paso: si $a_n < 6$, entonces $a_n + 6 < 12$ y basta dividir entre 2.
b. $a_{n+1} - a_n = \frac{6-a_n}{2} > 0$. Por el apartado anterior, $6 - a_n > 0$.
c. Monótona y acotada: $L = \frac{L+6}{2} \Rightarrow L = 6$. Por el teorema de la convergencia monótona existe el límite L; tomando límites en la recurrencia, $L = \frac{L+6}{2}$, es decir, $2L = L + 6$.