Apuntes - Sucesiones y series numéricas

Curso: Universidad 1

Una **sucesión** es una función $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto a_n$. Estudiar su comportamiento para n grande conduce a la noción de límite, y sumar infinitos términos conduce a las series. Ambos conceptos son la base de todo el análisis posterior: aproximaciones, desarrollos de Taylor e integrales impropias.

Actividad de introducción

Un estudiante de Bilbao quiere recorrer los 2 km que hay hasta la facultad de una forma peculiar: cada minuto camina la mitad de lo que le falta. Tras el primer minuto ha recorrido 1 km, tras el segundo 1,5 km, después 1,75 km... ¿Llegará alguna vez? Las distancias recorridas forman una sucesión que se acerca a 2 sin alcanzarlo, y la distancia total es la suma de infinitos términos $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots$ que, sorprendentemente, vale exactamente 2. Este tema estudia cuándo una sucesión se estabiliza en un valor y cuándo una suma infinita tiene sentido. Son las herramientas con las que se calculan préstamos, se estudia la acumulación de un fármaco en sangre o se programan las funciones de una calculadora.

Límite de una sucesión

Definición: límite de una sucesión

$\lim a_n = L$ significa que para todo $\varepsilon>0$ existe N tal que $|a_n-L|$ para todo $n\geq N$. Si el límite existe y es finito, la sucesión es **convergente**; entonces está acotada y el límite es único. Las operaciones con límites finitos (suma, producto, cociente con denominador no nulo) se comportan como se espera. Las **indeterminaciones** $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, 1^∞, $0\cdot\infty$ exigen técnica: dividir por la mayor potencia, multiplicar por el conjugado o usar $\lim(1+\frac{1}{a_n})^{a_n}=e$ cuando $a_n\to\infty$.

Teorema: Teoremas clave

Teoremas clave. (1) Toda sucesión monótona y acotada converge. (2) Regla del sandwich: si $b_n\leq a_n\leq c_n$ y $b_n,c_n\to L$, entonces $a_n\to L$. (3) Para $a_n>0$, si $a_{n+1}/a_n\to\ell$ entonces $a_n\to 0$. Jerarquía de infinitos: $\ln n\ll n^p\ll b^n\ll n!\ll n^n$ (con $p>0$, $b>1$).

Propiedad

Una sucesión definida por recurrencia $a_{n+1}=f(a_n)$ se estudia así: se prueba por inducción que es monótona y acotada, se deduce que converge a L y se resuelve $L=f(L)$.

Series numéricas

Definición: series numéricas

La serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge si lo hace la sucesión de sumas parciales $S_N = a_1 + \cdots + a_N$; su límite es la suma. **Condición necesaria:** si converge, $a_n \to 0$ (el recíproco es falso: la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge). Series de referencia: la **geométrica** $\sum_{n\geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}$ si $|r|$ y diverge en otro caso; la serie **p** $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$; las **telescópicas**, como $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Regla: Criterios para series de términos positivos

Criterios para series de términos positivos. Comparación: si $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum b_n$ converge, también converge $\sum a_n$. Comparación en el límite: si $a_n/b_n \to \ell \in (0, \infty)$, ambas series tienen el mismo carácter. Cociente (d'Alembert): $\ell = \lim a_{n+1}/a_n$; converge si ℓ y diverge si $\ell > 1$. Raíz (Cauchy): igual con $\lim \sqrt[n]{a_n}$. Integral: si f es positiva y decreciente, $\sum f(n)$ y $\int^{\infty} f$ tienen el mismo carácter. Si $\ell = 1$ el criterio del cociente no decide.

Propiedad

Series alternadas. Criterio de Leibniz: si $b_n \downarrow 0$, la serie $\sum (-1)^n b_n$ converge. Una serie es **absolutamente convergente** si converge $\sum |a_n|$; entonces converge. Si converge pero no absolutamente, es **condicionalmente convergente**, como $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Método: estudiar una serie

1. Comprueba si el término general tiende a 0; si no, diverge.
2. Identifica si es geométrica, serie p o telescópica.
3. Si los términos son positivos, aplica comparación, cociente, raíz o integral.
4. Si alterna, aplica Leibniz y estudia la convergencia absoluta.

Ejemplo 1

$$\lim \frac{3n^2+1}{2n^2-n} = \lim \frac{3+1/n^2}{2-1/n} = \frac{3}{2}.$$

Ejemplo 2

Estudiar $\sum \frac{2^n}{n!}$.

Cociente: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} \to 0$; converge (su suma desde 0 es e^2).

Ejemplo 3

Estudiar $\sum \frac{1}{n^2+n+1}$.

Como $\frac{1}{n^2+n+1}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, converge.

¡Atención!

Pensar que si $a_n \to 0$ la serie converge; aplicar el criterio del cociente cuando $\ell = 1$ y concluir; usar criterios de términos positivos en series alternadas; confundir la sucesión de términos con la de sumas parciales; olvidar que la fórmula geométrica exige $|r|$.

Sucesiones recurrentes y criterios útiles

Definición: sucesión recurrente

Una sucesión es recurrente cuando cada término se obtiene a partir de los anteriores mediante una regla, como $a_{n+1} = f(a_n)$, junto con uno o varios términos iniciales. Si una sucesión recurrente con f continua converge a L, entonces L es un punto fijo: $L = f(L)$. Pero el recíproco es falso: encontrar un punto fijo no prueba que la sucesión converja. Primero hay que demostrar la convergencia, casi siempre viendo que la sucesión es monótona y acotada, y solo después calcular el límite.

Propiedad: criterios de Stolz y de la raíz

Criterio de Stolz: si b_n es creciente y tiende a infinito, y existe $\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$, entonces $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$. Es la versión discreta de la regla de L'Hôpital. Criterio de la raíz para series: si $\sqrt[n]{a_n} \to L$, la serie de términos positivos converge si L y diverge si $L > 1$; si $L = 1$ el criterio no decide. Es especialmente útil cuando el término general contiene potencias n-ésimas.

Método: estudiar el carácter de una serie

1. Comprueba la condición necesaria: si $a_n \nrightarrow 0$, la serie diverge.
2. Busca si es geométrica o telescópica: entonces puedes calcular la suma.
3. Si hay factoriales o exponenciales, usa el criterio del cociente o el de la raíz.
4. Si es un cociente de potencias de n, compara en el límite con una serie $\sum \frac{1}{n^p}$.
5. Si alterna de signo, estudia primero la convergencia absoluta y, si falla, aplica el criterio de Leibniz.

Ejemplo 4

Calcula $\lim \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ con el criterio de Stolz.

Con $a_n = 1+\cdots+n$ y $b_n = n^2$: $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2}$. El límite es $\frac{1}{2}$, como confirma la fórmula $\frac{n(n+1)}{2n^2}$.

Ejemplo 5

Estudia $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Criterio de la raíz: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$. La serie converge.

Ejemplo 6

Un club de natación de Gijón aumenta cada mes sus socios un 2 % y además se apuntan 5 nuevos. Si empieza con 100 socios, ¿cuántos tendrá dentro de un año?

Recurrencia $s_{n+1} = 1{,}02 s_n + 5$. El punto fijo es $L = -250$, de modo que $s_n + 250 = 350 \cdot 1{,}02^n$ y $s_{12} = 350 \cdot 1{,}02^{12} - 250 \approx 193{,}9$: unos 194 socios.

Definición: convergencia absoluta y condicional

Una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente si converge la serie de los valores absolutos $\sum |a_n|$. Toda serie absolutamente convergente es convergente, y además su suma no cambia aunque se reordenen los términos. Si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge, se dice que es condicionalmente convergente; el ejemplo típico es la serie armónica alternada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$, cuya suma es $\ln 2$. Para estudiar una serie con términos de signo variable conviene empezar siempre por la convergencia absoluta, porque permite usar todos los criterios de las series de términos positivos.

Observación: sumas parciales y resto

Cuando una serie converge a S, la suma parcial S_N es una aproximación y el resto $R_N = S - S_N$ es el error. En una serie geométrica de razón r el resto es $\frac{a_{N+1}}{1-r}$, de modo que se conoce exactamente. En series de términos positivos que decrecen más deprisa que una geométrica, como $\sum \frac{1}{k!}$, se acota el resto comparándolo con una geométrica. En las alternadas basta con el primer término despreciado. Saber acotar el resto es lo que convierte una serie en un método de cálculo fiable, y es la base de los algoritmos numéricos que usan los programas de cálculo científico.

Series en la vida real

Las series aparecen siempre que se acumulan cantidades que cambian de forma regular. En economía, el valor actual de una renta, el cálculo de la cuota de una hipoteca o el de un plan de pensiones son sumas de progresiones geométricas. En medicina, la cantidad de fármaco en sangre tras dosis repetidas se estabiliza en el límite de una serie geométrica, y

ese valor de equilibrio se compara con los niveles terapéutico y tóxico. En física, la energía de una pelota que rebota o la posición de un objeto que se frena por rozamiento se describen con series. Las calculadoras y los ordenadores evalúan funciones como e^x, $\sin x$ o $\ln(1+x)$ sumando unos pocos términos de su serie de Taylor, y la velocidad de convergencia determina cuántos términos se necesitan para obtener la precisión deseada. Por eso no basta con saber si una serie converge: en la práctica también interesa acotar el error de la suma parcial, como se hace con el criterio de Leibniz para series alternadas o comparando con una geométrica cuando los términos decrecen rápido. En los problemas de aplicación hay que interpretar siempre el resultado: un límite de equilibrio de un fármaco, una cuota mensual o una distancia total deben tener un orden de magnitud razonable, y comparar con una estimación sencilla, como los primeros términos de la serie, permite detectar errores de planteamiento antes de dar la respuesta definitiva.

¡Atención!

Que el término general tienda a 0 es necesario pero no suficiente: la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge aunque $\frac{1}{n} \to 0$. Tampoco se pueden reordenar libremente los términos de una serie condicionalmente convergente: el teorema de Riemann dice que, reordenándola, se puede conseguir cualquier suma. Y en una progresión geométrica la fórmula $\frac{a}{1-r}$ solo vale si $|r|$.

¿Sabías que?

Nicole Oresme demostró hacia 1350 que la serie armónica diverge con el mismo argumento de agrupar términos que usamos hoy. Siglos después, Euler resolvió en 1734 el llamado problema de Basilea, demostrando que $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, un resultado que asombró a los matemáticos de su época.

El consejo de Otto

antes de aplicar un criterio, comprueba si el término general tiende a cero. Si no, la serie diverge y ya has terminado.