Ejercicios - Sucesiones y series numéricas

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Límites de sucesiones

Calcula los límites siguientes, indicando el tipo de indeterminación y la técnica empleada.

a. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{2n^2-n}$

b. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

c. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

d. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Monotonía y acotación

Sea $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$.

a. Calcula a_1, a_2, a_3 y a_{10}.
b. Demuestra que es creciente calculando $a_{n+1} - a_n$.
c. Demuestra que está acotada superiormente por 2.
d. Calcula su límite y comenta el teorema de la sucesión monótona.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Una sucesión recurrente

Sea $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$.

a. Calcula a_2, a_3 y a_4 con cuatro decimales.
b. Demuestra por inducción que a_n para todo n.
c. Demuestra que la sucesión es creciente.
d. Calcula el límite.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Jerarquía de infinitos

Para $n \to \infty$ se cumple $\ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$ ($p > 0$, $a > 1$), donde $f \ll g$ significa $\frac{f}{g} \to 0$.

a. Calcula $\lim \frac{\ln n}{n}$ y $\lim \frac{n^{10}}{1{,}1^n}$.
b. Calcula $\lim \frac{2^n}{n!}$ con el criterio del cociente.
c. Ordena de menor a mayor velocidad de crecimiento: n^3, 3^n, $\ln(n^5)$, $n!$, $\sqrt{n}$.
d. Para $n = 10$, ¿se cumple ya que n^{10}? ¿Qué enseña esto?

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Series geométricas y telescópicas

Calcula la suma de cada serie o justifica que diverge.

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$
b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$
d. Escribe $0{,}\overline{37}$ como suma de una serie geométrica y como fracción.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Criterios de convergencia

Estudia el carácter de cada serie de términos positivos indicando el criterio que usas.

a. $\displaystyle\sum \frac{n}{2^n}$
b. $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
c. $\displaystyle\sum \frac{n+1}{n^3+2}$
d. $\displaystyle\sum \frac{n!}{n^n}$

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Un depósito a plazo

Una persona de Zaragoza ingresa 10 000 € en un depósito al 3 % de interés anual compuesto, sin retirar intereses.

a. Escribe el capital C_n al cabo de n años. ¿Qué tipo de sucesión es?
b. Calcula C_5 y C_{10}.

c. ¿Cuántos años completos tarda en duplicarse el capital?
d. Compara con un interés simple del 3 %: ¿cuándo se duplicaría?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – La pelota que rebota

En el gimnasio de un colegio de Málaga se deja caer una pelota desde 2 m de altura. Tras cada bote alcanza $\frac{3}{4}$ de la altura anterior.

a. Escribe la altura h_n tras el bote n.
b. ¿Tras cuántos botes la altura es menor que 10 cm?
c. Calcula la distancia vertical total recorrida si rebota indefinidamente.
d. ¿Es realista el modelo? Comenta.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Una dosis de medicamento

Un paciente de un hospital de Oviedo toma 100 mg de un antibiótico cada 8 horas. Entre dos tomas, el organismo elimina el 60 % del fármaco presente.

a. Llama a_n a la cantidad justo después de la toma n. Justifica que $a_{n+1} = 0{,}4a_n + 100$ con $a_1 = 100$.
b. Calcula a_2, a_3 y a_4.
c. Escribe a_n como suma de una progresión geométrica y halla una fórmula cerrada.
d. ¿Hacia qué valor se estabiliza? Si la dosis tóxica es de 180 mg, ¿hay peligro?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – El copo de nieve de Koch

Se parte de un triángulo equilátero de lado 1. En cada paso, cada segmento se divide en tres partes iguales y sobre la central se construye un triángulo equilátero hacia fuera, eliminando la base.

a. ¿Cuántos lados tiene la figura tras n pasos y cuánto mide cada uno?
b. Calcula el perímetro P_n y su límite.
c. En el paso n se añaden $3 \cdot 4^{n-1}$ triángulos de lado 3^{-n}. Escribe el área añadida como serie.
d. Calcula el área límite sabiendo que el triángulo inicial tiene área $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Aquiles y la tortuga

En una carrera popular de Sevilla, un corredor (10 m/s) da 100 m de ventaja a una tortuga mecánica que avanza a 1 m/s. Zenón argumentaba que nunca la alcanza:

cuando llega donde estaba la tortuga, esta ya ha avanzado un poco.

a. Cuando el corredor recorre los 100 m, ¿cuánto ha avanzado la tortuga? ¿Y en el siguiente tramo?
b. Escribe la distancia total recorrida por el corredor hasta alcanzarla como serie geométrica y súmala.
c. Calcula el tiempo que tarda.
d. Resuelve el problema con una ecuación de primer grado y compara.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Ahorro mensual para un viaje

Una estudiante de Granada ingresa 100 € al final de cada mes en una cuenta que da un 0,25 % mensual, para pagarse un viaje dentro de 2 años.

a. ¿Cuánto vale al final el primer ingreso? ¿Y el último?
b. Escribe el saldo final como suma de una progresión geométrica.
c. Calcula el saldo final y los intereses ganados.
d. ¿Qué cantidad mensual necesitaría para reunir 3000 €?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Peces en un embalse

En un embalse de Extremadura hay 400 peces. Cada año muere o se pesca el 20 % y la confederación hidrográfica repuebla con 200 alevines: $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 200$.

a. Calcula p_1, p_2, p_3.
b. Halla el punto fijo L de la recurrencia.
c. Demuestra que $q_n = p_n - L$ es geométrica y escribe p_n.
d. ¿Cuántos años tarda la población en superar los 950 peces?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Las torres de Hanói

En un juego de las torres de Hanói hay que pasar n discos de una varilla a otra moviendo uno cada vez y sin poner nunca un disco sobre otro menor. El número mínimo de movimientos cumple $T_1 = 1$ y $T_n = 2T_{n-1} + 1$.

a. Justifica la recurrencia.
b. Calcula $T_2, \ldots, T_6$ y conjetura una fórmula.
c. Demuestra la fórmula por inducción.
d. Una leyenda habla de 64 discos movidos a un disco por segundo. ¿Cuántos años harían falta?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: calcular e y ln 2 con series

Una calculadora no guarda los valores de e ni de $\ln 2$: los calcula con series. Se sabe que $e = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ y $\ln 2 = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Estudia cuántos términos hacen falta.

a. Calcula $S_5 = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!}$ como fracción y en decimal.
b. Acota el error: $\sum_{k\geq 6} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{6!}\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \ldots\right)$. Calcula la cota.
c. Para la serie de $\ln 2$, el error de una serie alternada es menor que el primer término despreciado. ¿Cuántos términos garantizan error menor que $0{,}001$?
d. ¿Qué serie converge más deprisa? ¿A qué se debe?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: la pila de libros que sobresale

En la biblioteca de un instituto de Cuenca se apilan libros iguales de longitud 1 al borde de una mesa, de forma que cada uno sobresalga lo máximo posible sin caer. Se demuestra que con n libros el voladizo máximo es $\frac{1}{2}H_n$, con $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

a. Calcula el voladizo con 1, 2, 3 y 4 libros.
b. ¿Con cuántos libros el libro de arriba queda completamente fuera de la mesa (voladizo mayor que 1)?
c. Demuestra que $H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ agrupando los términos.
d. Deduce que la serie armónica diverge y que, con libros suficientes, el voladizo puede ser tan grande como se quiera. ¿Cuántos libros garantiza el apartado c) para un voladizo de 3?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: Fibonacci y los girasoles

Las semillas de un girasol se disponen en espirales cuyo número suele ser un término de la sucesión de Fibonacci: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. En un vivero de Córdoba se cuentan 34 y 55 espirales.

a. Escribe los 12 primeros términos.
b. Calcula los cocientes $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ para $n = 5, \ldots, 11$.
c. Suponiendo que $r_n \to \varphi$, demuestra que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ y calcula φ.
d. Comprueba la fórmula de Binet $F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$ para $n = 10$.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: una serie alternada

Considera $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$

a. Comprueba las hipótesis del criterio de Leibniz.
b. Calcula S_4 y acota el error cometido al tomar S_4 como valor de la suma.
c. ¿Es absolutamente convergente?
d. Sabiendo que $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, demuestra que la suma es $\frac{\pi^2}{12}$ y compara con S_4.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: el préstamo para un coche

Una familia de Logroño pide un préstamo de 15 000 € para un coche, a devolver en 60 cuotas mensuales iguales con un interés del 0,5 % mensual. La cuota c se calcula exigiendo que el valor actual de todas las cuotas sea igual al capital:

$$\sum_{k=1}^{60}\frac{c}{1{,}005^{k}} = 15000.$$

a. Explica por qué cada cuota se divide por $1{,}005^{k}$.
b. Suma la progresión geométrica y obtén la fórmula $c = \dfrac{15000\cdot 0{,}005}{1-1{,}005^{-60}}$.
c. Calcula la cuota y el total pagado.
d. ¿Cuánto se paga de intereses? Si se amplía el plazo a 84 meses, ¿baja la cuota? ¿Y el total de intereses? Razona.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: el criterio de la integral

Si f es positiva y decreciente en $[1,\infty)$, la serie $\sum f(n)$ y la integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ tienen el mismo carácter.

a. Justifica el criterio comparando las áreas de rectángulos con el área bajo la curva.
b. Demuestra que $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p>1$.
c. Estudia $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$ y $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.
d. Demuestra que $\ln(N+1) \leq H_N \leq 1+\ln N$ y estima $H_{1000000}$.