Soluciones - Sucesiones y series numéricas

Curso: Universidad 1

Solución del ejercicio 1

Planteamiento. Antes de calcular identificamos el tipo de indeterminación: $\frac{\infty}{\infty}$ se resuelve dividiendo por la mayor potencia, $\infty - \infty$ multiplicando por el conjugado y 1^∞ llevándola al número e. La comparación de infinitos resuelve el último.

a. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ con el mismo grado: dividimos por n^2 y queda $\frac{3+1/n^2}{2-1/n} \to \frac{3}{2}$.

b. Indeterminación $\infty - \infty$: multiplicamos por el conjugado, $\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \to \frac{1}{2}$.

c. Indeterminación 1^∞: $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right]^2 \to e^2 \approx 7{,}39$.

d. La exponencial crece más deprisa que cualquier potencia: el límite es 0. Por ejemplo, el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 2

Planteamiento. Calculamos algunos términos para intuir el comportamiento. La monotonía se demuestra estudiando el signo de $a_{n+1} - a_n$ y la acotación comparando con la cota; el teorema de la sucesión monótona garantiza entonces la convergencia.

a. $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{7}{6}$, $a_{10} = \frac{21}{13} \approx 1{,}62$.

b. $a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{(2n+3)(n+3)-(2n+1)(n+4)}{(n+3)(n+4)} = \frac{5}{(n+3)(n+4)} > 0$.

c. $2 - a_n = \frac{2n+6-2n-1}{n+3} = \frac{5}{n+3} > 0$, luego a_n para todo n.

d. $\lim a_n = 2$. Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente; aquí el límite coincide con la cota 2.

Solución del ejercicio 3

Planteamiento. En una sucesión recurrente primero demostramos que converge (acotada por inducción y monótona) y solo después calculamos el límite, que debe cumplir la ecuación del punto fijo $L = f(L)$. Descartamos las soluciones incompatibles con el signo de los términos.

a. $a_2 = \sqrt{3} \approx 1{,}7321$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 1{,}9319$, $a_4 \approx 1{,}9829$.

b. $a_1 = 1$. Si a_n, entonces $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$.

c. $a_{n+1} > a_n \iff 2 + a_n > a_n^2 \iff (2-a_n)(1+a_n) > 0$, que es cierto porque 0.

d. Es creciente y acotada, luego converge a un L que cumple $L = \sqrt{2+L}$, es decir

$L^2 - L - 2 = 0$, con $L = 2$ (la raíz -1 se descarta porque $a_n > 0$).

Solución del ejercicio 4

Planteamiento. La jerarquía de infinitos ordena las funciones según su velocidad de crecimiento. Usamos el criterio del cociente cuando aparecen factoriales o exponenciales, y comprobamos con números concretos que el adelantamiento puede tardar en producirse.

a. Ambos límites valen 0: el logaritmo es menos que cualquier potencia y la exponencial de base mayor que 1 domina a cualquier potencia.
b. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} \to 0$, luego $\frac{2^n}{n!} \to 0$.
c. $\ln(n^5) = 5\ln n \ll \sqrt{n} \ll n^3 \ll 3^n \ll n!$.
d. No: 10^{10} frente a $1{,}1^{10} \approx 2{,}59$. Los límites hablan del comportamiento final; el «adelantamiento» puede tardar mucho (aquí ocurre hacia $n \approx 686$).

Solución del ejercicio 5

Planteamiento. Reconocemos el tipo de serie. En una geométrica con $|r|$ aplicamos $\frac{a}{1-r}$. En una telescópica descomponemos en fracciones simples, escribimos la suma parcial S_N, observamos las cancelaciones y calculamos su límite.

a. Geométrica de razón $\frac{2}{3}$, $|r|$: suma $\frac{1}{1-2/3} = 3$.
b. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; la suma parcial es $S_N = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1$.
c. $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$; $S_N = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \to \frac{1}{2}$.
d. .

Solución del ejercicio 6

Planteamiento. Elegimos el criterio según la forma del término general: cociente para factoriales y exponenciales, comparación con $\sum \frac{1}{n^p}$ para cocientes de potencias de n, y la serie p directamente cuando el término es una potencia de n.

a. Cociente: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$: converge (de hecho, su suma es 2).
b. Serie p con $p = \frac{1}{2} \leq 1$: diverge.
c. Comparación en el límite con $\sum \frac{1}{n^2}$: $\frac{(n+1)/(n^3+2)}{1/n^2} \to 1$, y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, luego converge.
d. Cociente: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$: converge.

Solución del ejercicio 7

Planteamiento. Con interés compuesto el capital se multiplica cada año por $1{,}03$: es

una progresión geométrica. Para hallar el tiempo de duplicación resolvemos una ecuación exponencial con logaritmos y la comparamos con el interés simple.

a. $C_n = 10000 \cdot 1{,}03^n$: progresión geométrica de razón $1{,}03$.
b. $C_5 \approx 11592{,}74$ € y $C_{10} \approx 13439{,}16$ €.
c. $1{,}03^n \geq 2 \iff n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}45$: hacen falta 24 años.
d. Con interés simple, $C_n = 10000(1 + 0{,}03n)$, que es aritmética; se duplica cuando $0{,}03n = 1$, a los 34 años. El interés compuesto crece exponencialmente.

Solución del ejercicio 8

Planteamiento. Las alturas de los botes forman una progresión geométrica de razón $\frac{3}{4}$. Para saber cuándo baja de 10 cm usamos logaritmos, y la distancia total es una serie geométrica, contando que cada bote se recorre subiendo y bajando.

a. $h_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ m.
b. $2(0{,}75)^n \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}75} \approx 10{,}41$: tras 11 botes.
c. Baja 2 m y después sube y baja cada h_n:
$D = 2 + 2\sum_{n\geq 1} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 2 + 4 \cdot \frac{3/4}{1-3/4} = 2 + 12 = 14$ m.
d. La distancia es finita aunque haya infinitos botes; en la realidad la pelota se para porque la deformación y el rozamiento no son proporcionales a la altura cuando esta es muy pequeña.

Solución del ejercicio 9

Planteamiento. Tras cada toma queda el 40 % del fármaco y se añaden 100 mg, lo que da una recurrencia lineal. Desarrollándola aparece la suma de una progresión geométrica, cuyo límite es el nivel de equilibrio que se compara con la dosis tóxica.

a. Queda el 40 % de lo que había y se añade una dosis de 100 mg.
b. $a_2 = 140$, $a_3 = 156$, $a_4 = 162{,}4$ mg.
c. $a_n = 100(1 + 0{,}4 + \cdots + 0{,}4^{n-1}) = 100 \cdot \frac{1-0{,}4^n}{0{,}6}$.
d. $a_n \to \frac{100}{0{,}6} \approx 166{,}7$ mg, que no supera nunca 180 mg: no hay peligro con esta pauta.

Solución del ejercicio 10

Planteamiento. En cada paso contamos el número de lados y su longitud para obtener el perímetro, que es una progresión geométrica de razón mayor que 1. El área añadida en cada paso forma una serie geométrica de razón menor que 1, que sí converge.

a. $3 \cdot 4^n$ lados de longitud 3^{-n}.
b. $P_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$: el perímetro es infinito.
c. Cada triángulo añadido tiene área $A_0 \cdot 9^{-n}$; el área añadida es

$\sum_{n\geq 1} 3\cdot 4^{n-1}A_0 9^{-n} = \frac{A_0}{3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$.

d. $\frac{A_0}{3}\cdot\frac{1}{1-4/9} = \frac{3A_0}{5}$; área total $A_0 + \frac{3}{5}A_0 = \frac{8}{5}A_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}69$. Área finita con perímetro infinito.

Solución del ejercicio 11

Planteamiento. Las distancias que recorre el corredor en cada etapa de Zenón forman una progresión geométrica de razón $0{,}1$. Sumamos la serie para obtener la distancia y el tiempo totales y lo comprobamos con una ecuación de primer grado.

a. Tarda 10 s y la tortuga avanza 10 m; en el siguiente tramo de 10 m (1 s) avanza 1 m, y así sucesivamente.
b. $100 + 10 + 1 + 0{,}1 + \cdots = \frac{100}{1-0{,}1} = \frac{1000}{9} \approx 111{,}1$ m.
c. $10 + 1 + 0{,}1 + \cdots = \frac{100}{9} \approx 11{,}1$ s.
d. $10t = 100 + t \Rightarrow t = \frac{100}{9}$ s y la distancia es $\frac{1000}{9}$ m. Infinitos tramos pueden sumar una cantidad finita: esa es la resolución de la paradoja.

Solución del ejercicio 12

Planteamiento. Cada ingreso mensual rinde intereses durante un número distinto de meses. El saldo final es la suma de una progresión geométrica de razón $1{,}0025$; con su fórmula calculamos el saldo y despejamos la cuota necesaria para un objetivo.

a. El primero rinde 23 meses: $100\cdot 1{,}0025^{23} \approx 105{,}91$ €; el último no rinde nada: 100 €.
b. $S = 100\left(1 + 1{,}0025 + \cdots + 1{,}0025^{23}\right) = 100\cdot\frac{1{,}0025^{24}-1}{0{,}0025}$.
c. $S \approx 2470{,}28$ €; intereses: $2470{,}28 - 2400 \approx 70{,}28$ €.
d. $c = \frac{3000}{(1{,}0025^{24}-1)/0{,}0025} \approx 121{,}44$ € al mes.

Solución del ejercicio 13

Planteamiento. Calculamos los primeros términos con la recurrencia y hallamos su punto fijo. La diferencia entre la población y el punto fijo es una sucesión geométrica, lo que da una fórmula cerrada para resolver la inecuación con logaritmos.

a. $p_1 = 520$, $p_2 = 616$, $p_3 = 692{,}8$.
b. $L = 0{,}8L + 200 \Rightarrow L = 1000$.
c. $q_{n+1} = p_{n+1} - 1000 = 0{,}8p_n - 800 = 0{,}8q_n$; como $q_0 = -600$, $p_n = 1000 - 600\cdot 0{,}8^n$.
d. $600\cdot 0{,}8^n$: a partir del año 12.

Solución del ejercicio 14

Planteamiento. Justificamos la recurrencia con la estrategia recursiva del juego, calculamos términos para conjeturar la fórmula $2^n - 1$ y la demostramos por inducción. Después estimamos el tiempo para 64 discos convirtiendo segundos en años.

a. Para mover n discos hay que mover los $n-1$ de arriba a la varilla auxiliar (T_{n-1}), el grande (1) y volver a poner encima los $n-1$ (T_{n-1}).
b. $3, 7, 15, 31, 63$: $T_n = 2^n - 1$.
c. $T_1 = 1 = 2^1 - 1$. Si $T_{n-1} = 2^{n-1} - 1$, entonces $T_n = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$.
d. $2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$ s, unos $5{,}85 \cdot 10^{11}$ años: más de 40 veces la edad del universo.

Solución del ejercicio 15

Planteamiento. Sumamos los primeros términos de cada serie y acotamos el error: en la de e, comparando el resto con una serie geométrica; en la alternada de $\ln 2$, con el primer término despreciado. Así comparamos la rapidez de convergencia.

a. $S_5 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60} \approx 2{,}71667$ (y $e \approx 2{,}71828$).
b. $\frac{1}{720} \cdot \frac{1}{1-1/7} = \frac{7}{4320} \approx 0{,}00162$; el error real es $0{,}00161$.
c. Hace falta $\frac{1}{N+1}$, es decir $N \geq 1000$ términos.
d. La de e, porque sus términos decrecen como $\frac{1}{k!}$, mucho más rápido que $\frac{1}{k}$. Las calculadoras usan series de convergencia rápida.

Solución del ejercicio 16

Planteamiento. Calculamos los voladizos con la fórmula dada y buscamos cuándo superan 1. Agrupando los términos de la serie armónica en bloques que suman al menos $\frac{1}{2}$ demostramos que diverge y estimamos cuántos libros hacen falta.

a. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{12} \approx 0{,}92$ y $\frac{25}{24} \approx 1{,}04$.
b. Con 4 libros: $\frac{1}{2} H_4 = \frac{25}{24} > 1$.
c. $H_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \ldots$; cada grupo suma al menos $\frac{1}{2}$ y hay k grupos.
d. $H_{2^k} \to \infty$, luego $H_n \to \infty$. Voladizo 3 exige $H_n > 6$; basta $1 + \frac{k}{2} \geq 6$, $k = 10$: $2^{10} = 1024$ libros (en realidad bastan 227).

Solución del ejercicio 17

Planteamiento. Escribimos los términos de Fibonacci y los cocientes consecutivos, que se acercan a un valor fijo. Pasando al límite en la recurrencia de los cocientes obtenemos la ecuación del número áureo y comprobamos la fórmula de Binet.

a. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$.

b. $1{,}6000;\ 1{,}6250;\ 1{,}6154;\ 1{,}6190;\ 1{,}6176;\ 1{,}6182;\ 1{,}6180$.
c. $r_{n+1} = \frac{F_{n+1}+F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{r_n}$; en el límite $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$, $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180$.
d. $\frac{\varphi^{10} - (1-\varphi)^{10}}{\sqrt{5}} = \frac{122{,}9919 - 0{,}0081}{2{,}2361} = 55{,}0000$, que es $F_{10} = 55$.

Solución del ejercicio 18

Planteamiento. Comprobamos las tres hipótesis del criterio de Leibniz: términos positivos, decrecientes y con límite cero. Acotamos el error con el primer término despreciado y estudiamos la convergencia absoluta comparando con una serie p.

a. $b_n = \frac{1}{n^2}$ es positiva, decreciente y tiende a 0: la serie converge.
b. $S_4 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{115}{144} \approx 0{,}7986$; error .
c. Sí, porque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (serie p con $p = 2$).
d. Restando dos veces los términos pares: $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum \frac{1}{n^2} - 2\sum \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{12} \approx 0{,}8225$. La diferencia con S_4 es $0{,}024$.

Solución del ejercicio 19

Planteamiento. El valor actual de las cuotas es la suma de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{1{,}005}$. Igualándola al capital despejamos la cuota, calculamos el total pagado y comparamos los intereses con un plazo más largo.

a. Una cuota pagada dentro de k meses equivale hoy a menos dinero: hay que descontar los intereses de esos k meses.
b. $\sum_{k=1}^{60} v^k = v\frac{1-v^{60}}{1-v}$ con $v = \frac{1}{1{,}005}$, que da $\frac{1-1{,}005^{-60}}{0{,}005}$. Despejando c se obtiene la fórmula.
c. $c \approx 289{,}99$ € al mes; total $60c \approx 17399{,}52$ €.
d. Intereses $\approx 2399{,}52$ €. Con 84 meses la cuota baja a unos 219,13 €, pero se pagan 3406,78 € de intereses: más plazo, más intereses.

Solución del ejercicio 20

Planteamiento. Comparamos la serie con la integral de la misma función mediante rectángulos por encima y por debajo de la curva. Calculando la integral impropia decidimos la convergencia y obtenemos cotas para las sumas parciales.

a. Como f decrece, $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f \le f(n)$. Sumando, las sumas parciales y la integral se acotan mutuamente.
b. $\int_1^\infty x^{-p}dx$ vale $\frac{1}{p-1}$ si $p > 1$ y diverge si $p \le 1$.
c. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x) \to \infty$: diverge. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}$, que tiene límite: converge.

d. Por la comparación anterior con $f(x) = \frac{1}{x}$. Para $N = 10^6$: $13{,}82 \leq H_N \leq 14{,}82$ (el valor real es $14{,}39$).