Soluciones del examen - Probabilidad y variables aleatorias

Curso: Universidad 1 · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

Criterios. Se valora la tabla completa y la elección correcta del denominador en cada condicionada.

a. Musculación: 45 nadan, 75 no. Sin musculación: 50 nadan, 30 no. Nadan 95 en total. Totales: 120 hacen musculación y 80 no; nadan 95 y no nadan $75 + 30 = 105$; en total, 200.
b. $\frac{45}{120} = 0{,}375$. El denominador son los 120 socios de musculación.
c. $\frac{45}{95} \approx 0{,}474$. Ahora el denominador son los 95 que nadan. Las dos probabilidades son distintas: en general $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

Criterios. Se valora el árbol, la probabilidad total y la aplicación de Bayes.

a. $0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}16$. Árbol: A (0,6) con retraso 0,1 y B (0,4) con retraso 0,25. Por la probabilidad total, $P(R) = P(A)P(R \mid A) + P(B)P(R \mid B) = 0{,}06 + 0{,}10$. Un 16 % de los envíos llega tarde.
b. $\frac{0{,}1}{0{,}16} = 0{,}625$. Bayes: $P(B \mid R) = \frac{P(B)P(R|B)}{P(R)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}25}{0{,}16}$. Aunque B lleva solo el 40 % de los envíos, causa el 62,5 % de los retrasos.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

Criterios. Se valora identificar la binomial y aplicar sus fórmulas.

a. $\binom{10}{3}\, 0{,}3^3\, 0{,}7^7 \approx 0{,}2668$. $X \sim B(10;\, 0{,}3)$, ya que hay 10 clientes independientes con la misma probabilidad. $\binom{10}{3} = 120$, $0{,}3^3 = 0{,}027$ y $0{,}7^7 \approx 0{,}0824$. Multiplicando, $120 \cdot 0{,}027 \cdot 0{,}0824 \approx 0{,}267$: en algo más de una de cada cuatro tandas de 10 clientes, exactamente 3 compran.
b. $0{,}7^{10} + 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^9 \approx 0{,}1493$. Es $P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0{,}0282 + 0{,}1211$. La probabilidad de que compren como mucho uno es baja, de un 15 %, porque se esperan 3 compradores.
c. $\mu = 3$, $\sigma = \sqrt{2{,}1} \approx 1{,}449$. Se usan $\mu = np = 10 \cdot 0{,}3$ y $\sigma^2 = np(1-p) = 2{,}1$. Por término medio, 3 de cada 10 clientes compran un libro de bolsillo.

Solución del ejercicio 4 (5 puntos)

Criterios. Se valora la tipificación, el uso de la tabla y el percentil.

a. $P(Z > 1{,}5) \approx 0{,}0668$. Tipificamos: $z = \frac{230-200}{20} = 1{,}5$, y $P(Z > 1{,}5) = 1 - 0{,}9332$. Alrededor del 6,7 % de las naranjas son extra.
b. $P(-1 < Z < 1) \approx 0{,}6827$. Para 180 y 220 g, $z = \pm 1$: $P = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 \approx 0{,}683$.
c. $200 + 1{,}645 \cdot 20 \approx 232{,}9$ g. Buscamos z con $P(Z > z) = 0{,}05$, que es $z = 1{,}645$, y se destipifica con $x = \mu + z\sigma$. Las naranjas que superan unos 233 g son el 5 % más pesado.

Solución del ejercicio 5 (3 puntos)

Criterios. Se valora el cálculo de la esperanza y su interpretación.

a. $40 - (300 \cdot 0{,}05 + 100 \cdot 0{,}1) = 40 - 25 = 15$ €. Es el ingreso seguro de 40 € menos el pago esperado, $300 \cdot 0{,}05 + 100 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}85 = 25$ €. Con probabilidad $1 - 0{,}05 - 0{,}1 = 0{,}85$ no paga nada.
b. A largo plazo la compañía gana unos 15 € por póliza, que cubren sus gastos y su beneficio. En una póliza concreta puede perder hasta 260 €, pero el promedio es positivo.