# Ejercicios - Probabilidad y variables aleatorias

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

## Ejercicio 1

### Ejercicio 1 – Regla de Laplace con dos dados

Se lanzan dos dados equilibrados, uno rojo y otro azul, y se suman los puntos.

a. ¿Cuántos resultados tiene el espacio muestral? ¿Son equiprobables?
b. Calcula $P(\text{suma} = 7)$.
c. Calcula $P(\text{suma} \geq 10)$.
d. Calcula la probabilidad de sacar dobles y la de que la suma sea 7 sabiendo que no salen dobles.

## Ejercicio 2

### Ejercicio 2 – Operaciones con sucesos

En una facultad de Bilbao, el 50 % de los estudiantes usa el metro ($A$), el 40 % la bicicleta ($B$) y el 20 % ambos.

a. Calcula $P(A \cup B)$.
b. Calcula la probabilidad de que use el metro pero no la bicicleta.
c. Calcula la probabilidad de que no use ninguno de los dos.
d. ¿Son $A$ y $B$ independientes? Justifica.

## Ejercicio 3

### Ejercicio 3 – Combinatoria y baraja española

Se reparten 5 cartas de una baraja española de 40 cartas (10 de cada palo: oros, copas, espadas y bastos).

a. ¿Cuántas manos distintas hay?
b. Calcula la probabilidad de recibir exactamente 2 oros.
c. Calcula la probabilidad de no recibir ningún oro.
d. Calcula la probabilidad de recibir al menos un oro.

## Ejercicio 4

### Ejercicio 4 – Probabilidad condicionada con una tabla

En una universidad de Valencia se clasifica a 400 estudiantes de primer curso según la rama (Ciencias o Letras) y según si viven con su familia o en un piso compartido.

| | Con la familia | Piso compartido | Total |
|---|---|---|---|
| Ciencias | 120 | 80 | 200 |
| Letras | 60 | 140 | 200 |
| Total | 180 | 220 | 400 |

a. Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar sea de Ciencias.
b. Calcula $P(\text{piso} \mid \text{Ciencias})$ y $P(\text{piso} \mid \text{Letras})$.
c. Calcula $P(\text{Ciencias} \mid \text{piso})$.
d. ¿Son independientes la rama y el tipo de vivienda?

## Ejercicio 5

### Ejercicio 5 – Probabilidad total y teorema de Bayes

Una fábrica de Sagunto produce tornillos con tres máquinas: $M_1$ fabrica el 50 % con un 2 % de defectuosos, $M_2$ el 30 % con un 3 % y $M_3$ el 20 % con un 5 %.

a. Dibuja el diagrama de árbol.
b. Calcula la probabilidad de que un tornillo sea defectuoso.
c. Un tornillo es defectuoso. ¿Qué probabilidad hay de que venga de $M_3$?
d. ¿Qué máquina es la responsable más probable de los defectuosos?

## Ejercicio 6

### Ejercicio 6 – Una variable aleatoria discreta

Se lanzan tres monedas equilibradas y $X$ es el número de caras.

a. Escribe la función de probabilidad de $X$.
b. Calcula $E(X)$.
c. Calcula $\mathrm{Var}(X)$ y la desviación típica.
d. Escribe la función de distribución $F(x)$ y calcula $P(X \leq 1)$.

## Ejercicio 7

### Ejercicio 7 – Un test de diagnóstico

Una enfermedad afecta al 1 % de la población. Un test rápido de un centro de salud de Córdoba da positivo en el 95 % de los enfermos (sensibilidad) y negativo en el 90 % de los sanos (especificidad).

a. Calcula la probabilidad de que el test dé positivo.
b. Una persona da positivo. ¿Qué probabilidad tiene de estar enferma?
c. Interpreta el resultado: ¿por qué es tan bajo?
d. Si el test se repite de forma independiente y vuelve a dar positivo, ¿cuál es ahora

la probabilidad?

## Ejercicio 8

### Ejercicio 8 – Los penaltis de una delantera

Una delantera de un equipo de fútbol de Barcelona marca cada penalti con probabilidad 0,8, independientemente de los demás. En un entrenamiento lanza 5 penaltis y $X$ es el número de goles.

a. Justifica que $X \sim B(5;\, 0{,}8)$.
b. Calcula $P(X = 4)$ y $P(X \geq 4)$.
c. Calcula $E(X)$ y $\sigma$.
d. ¿Qué probabilidad hay de que falle al menos dos?

## Ejercicio 9

### Ejercicio 9 – Llamadas a un servicio de emergencias

Un centro de emergencias 112 de una comarca recibe de noche una media de 3 llamadas por hora, que llegan de forma independiente. El número de llamadas en una hora sigue una distribución de Poisson.

a. Calcula la probabilidad de que en una hora no haya llamadas.
b. Calcula la probabilidad de que haya al menos 2 llamadas.
c. ¿Qué distribución sigue el número de llamadas en 2 horas? Calcula la probabilidad de que no haya ninguna.
d. ¿Cuántas llamadas por hora debería poder atender el centro para cubrir el 95 % de las horas?

## Ejercicio 10

### Ejercicio 10 – La estatura de los jóvenes

La estatura de los varones españoles de 20 años sigue aproximadamente una distribución normal de media 176 cm y desviación típica 7 cm.

a. Calcula la probabilidad de que un joven mida más de 190 cm.
b. Calcula la probabilidad de que mida entre 170 y 185 cm.
c. ¿Qué estatura supera solo el 10 % de los jóvenes?
d. En un grupo de 500 jóvenes, ¿cuántos esperas que superen los 190 cm?

## Ejercicio 11

### Ejercicio 11 – Un juego de feria

En una feria de Sevilla, por 2 € se lanza un dado: si sale 6 se cobran 10 €, si sale 5 se recupera la apuesta (2 €) y en otro caso no se cobra nada.

a. Define la ganancia neta $G$ y escribe su distribución.
b. Calcula $E(G)$.
c. ¿Es un juego justo? ¿Quién gana a largo plazo?
d. ¿Cuánto debería pagar el 6 para que el juego fuera justo?

## Ejercicio 12

### Ejercicio 12 – La batería de un teléfono

La vida útil (en años) de la batería de un modelo de teléfono móvil sigue una distribución exponencial de media 2 años: $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}$ para $t \geq 0$.

a. Comprueba que $f$ es una función de densidad.
b. Calcula la probabilidad de que dure más de 3 años.
c. Calcula la mediana de la duración.
d. Una batería ya ha funcionado 2 años. ¿Qué probabilidad hay de que dure 3 años más? Comenta la «falta de memoria».

## Ejercicio 13

### Ejercicio 13 – Overbooking en un vuelo

Una aerolínea vende 200 billetes para un vuelo Madrid-Tenerife de 185 plazas, porque sabe que cada pasajero se presenta con probabilidad 0,9, de forma independiente.

a. ¿Qué distribución sigue el número $X$ de pasajeros que se presentan? Calcula su media y su desviación típica.
b. Aproxima $X$ por una normal y calcula $P(X > 185)$ con la corrección por continuidad.
c. ¿Cuántos billetes podría vender como máximo para que la probabilidad de overbooking sea menor del 1 %?
d. ¿Qué riesgo asume la aerolínea al vender 200 billetes?

## Ejercicio 14

### Ejercicio 14 – El tiempo de una reparación

El tiempo (en horas) que tarda un técnico de una empresa de ascensores de Zaragoza en una reparación es una variable continua con densidad $f(x) = kx(2 - x)$ para $0 \leq x \leq 2$ y 0 en otro caso.

a. Calcula $k$.
b. Calcula la probabilidad de que tarde menos de una hora.
c. Calcula $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.
d. Calcula la probabilidad de que tarde más de hora y media.

## Ejercicio 15

**Ejercicio 15 – Problema: la fiabilidad de un servidor**

Un centro de datos de Madrid usa componentes que funcionan cada uno con probabilidad 0,9 durante un año, de forma independiente. Se comparan tres diseños: (A) tres componentes en serie (el sistema funciona si funcionan todos), (B) tres en paralelo (funciona si funciona alguno) y (C) uno en serie con dos en paralelo.

a. Calcula la fiabilidad del diseño A.
b. Calcula la del diseño B usando el complementario.
c. Calcula la del diseño C.
d. Ordena los diseños y comenta el coste de cada uno.
e. ¿Cuántos componentes en paralelo hacen falta para una fiabilidad del 99,99 %?

## Ejercicio 16

**Ejercicio 16 – Problema: el concurso de las tres puertas**

En un concurso de televisión hay tres puertas: detrás de una hay un coche y detrás de las otras dos, nada. El concursante elige una puerta; el presentador, que sabe dónde está el coche, abre otra de las puertas que no tiene premio y ofrece cambiar.

a. ¿Qué probabilidad tiene de ganar si no cambia?
b. Demuestra con un árbol que si cambia gana con probabilidad $\frac{2}{3}$.
c. Explica intuitivamente el resultado.
d. Repite el razonamiento con 10 puertas, si el presentador abre 8 sin premio.

## Ejercicio 17

**Ejercicio 17 – Problema: la paradoja del cumpleaños**

En una clase de 23 estudiantes de una universidad de Granada, el profesor apuesta a que hay al menos dos que cumplen años el mismo día. Supón 365 días equiprobables e independientes.

a. Calcula la probabilidad de que todos cumplan años en días distintos.
b. Calcula la probabilidad de que al menos dos coincidan.
c. ¿Cuántos estudiantes hacen falta para que la probabilidad supere el 90 %?
d. ¿Por qué el resultado sorprende tanto?

## Ejercicio 18

**Ejercicio 18 – Problema: control de calidad de un lote**

Una empresa de componentes electrónicos de Málaga recibe lotes de 50 piezas. El inspector toma 5 piezas al azar sin reemplazamiento y acepta el lote si ninguna es defectuosa. Un lote concreto tiene 4 piezas defectuosas.

a. ¿Qué distribución sigue el número de defectuosas en la muestra?
b. Calcula la probabilidad de aceptar el lote.
c. Aproxima esa probabilidad con una binomial $B(5;\ 0{,}08)$ y compara.
d. Calcula la probabilidad de encontrar exactamente una defectuosa.
e. ¿Es un buen plan de control? Propón una mejora.

## Ejercicio 19

**Ejercicio 19 – Problema: el tiempo de un reparto**

Un repartidor de una empresa de mensajería de Sevilla hace dos tramos. El primero dura $X \sim N(30, 4)$ minutos y el segundo $Y \sim N(20, 3)$, independientes (el segundo parámetro es la desviación típica).

a. ¿Qué distribución sigue el tiempo total $T = X + Y$? Calcula su media y su desviación típica.
b. Calcula la probabilidad de que el reparto dure más de una hora.
c. La empresa garantiza la entrega en un tiempo que se cumple el 95 % de las veces. ¿Cuál es?
d. ¿Por qué no se suman las desviaciones típicas?

## Ejercicio 20

**Ejercicio 20 – Desafío: propiedades generales**

Demuestra los resultados siguientes a partir de los axiomas y de las definiciones.

a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
b. Si $A$ y $B$ son independientes, también lo son $A$ y .
c. $E(aX + b) = aE(X) + b$ y $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$ para una variable discreta.
d. $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$.