Soluciones - Probabilidad y variables aleatorias

Curso: Universidad 1

Solución del ejercicio 1

Planteamiento. Con dos dados distintos, los 36 pares ordenados son equiprobables y podemos aplicar la regla de Laplace: casos favorables entre casos posibles. Contamos los pares de cada suceso y, para la condicionada, reducimos el espacio muestral.

a. Hay $6 \cdot 6 = 36$ pares ordenados (rojo, azul), todos con probabilidad $\frac{1}{36}$. Las sumas, en cambio, no son equiprobables.
b. Casos favorables: $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$, 6 casos: $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
c. Suma 10: 3 casos; suma 11: 2; suma 12: 1. Total 6: $P = \frac{1}{6}$.
d. Dobles: 6 casos, $P = \frac{1}{6}$. Sin dobles quedan 30 casos y los 6 de suma 7 no son dobles: $P = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Solución del ejercicio 2

Planteamiento. Usamos la fórmula de la unión, la diferencia de sucesos y las leyes de De Morgan. Para la independencia comparamos la probabilidad de la intersección con el producto de las probabilidades.

a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7$.
b. .
c. Por De Morgan, .
d. Sí: $P(A)P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 = P(A \cap B)$.

Solución del ejercicio 3

Planteamiento. Como el orden de las cartas no importa, contamos con números combinatorios. Elegimos por separado las cartas de oros y las de los otros palos y multiplicamos; el suceso «al menos uno» se calcula con el complementario.

a. El orden no importa: $\binom{40}{5} = 658008$ manos.
b. Elegimos 2 oros de 10 y 3 cartas de los otros 30: $\frac{\binom{10}{2}\binom{30}{3}}{\binom{40}{5}} = \frac{45 \cdot 4060}{658008} \approx 0{,}2777$.
c. $\frac{\binom{30}{5}}{\binom{40}{5}} = \frac{142506}{658008} \approx 0{,}2166$.
d. Complementario: $1 - 0{,}2166 \approx 0{,}7834$.

Solución del ejercicio 4

Planteamiento. En una tabla de contingencia, la probabilidad condicionada se calcula restringiéndose a la fila o columna de la condición. La independencia exige que la condicionada coincida con la probabilidad sin condición.

a. $P(C) = \frac{200}{400} = 0{,}5$.
b. $P(\text{piso} \mid C) = \frac{80}{200} = 0{,}4$ y $P(\text{piso} \mid L) = \frac{140}{200} = 0{,}7$.
c. $P(C \mid \text{piso}) = \frac{80}{220} = \frac{4}{11} \approx 0{,}364$.
d. No: $P(\text{piso} \mid C) = 0{,}4 \neq P(\text{piso}) = \frac{220}{400} = 0{,}55$.

Solución del ejercicio 5

Planteamiento. Un diagrama de árbol organiza el problema. El teorema de la probabilidad total suma los caminos que llevan a un defectuoso, y el teorema de Bayes divide el camino de interés entre ese total para «invertir» la condición.

a. Primer nivel: M_1 (0,5), M_2 (0,3), M_3 (0,2); segundo nivel: defectuoso o no con las probabilidades condicionadas.
b. $P(D) = 0{,}5 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}03 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}01 + 0{,}009 + 0{,}01 = 0{,}029$.
c. $P(M_3 \mid D) = \frac{0{,}01}{0{,}029} \approx 0{,}345$.
d. $P(M_1 \mid D) = \frac{0{,}01}{0{,}029} \approx 0{,}345$ y $P(M_2 \mid D) \approx 0{,}310$. Empatan M_1 y M_3: una por producir mucho y la otra por fallar más.

Solución del ejercicio 6

Planteamiento. Contamos los resultados de las tres monedas para obtener la función de probabilidad. La esperanza es la suma de valores por probabilidades y la varianza se calcula como $E(X^2) - E(X)^2$.

a. $P(X=0) = \frac{1}{8}$, $P(X=1) = \frac{3}{8}$, $P(X=2) = \frac{3}{8}$, $P(X=3) = \frac{1}{8}$.
b. $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$.
c. $E(X^2) = \frac{3+12+9}{8} = 3$, así que $\operatorname{Var}(X) = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75$ y $\sigma \approx 0{,}866$.
d. $F(x) = 0$ si x; $\frac{1}{8}$ en $[0,1)$; $\frac{1}{2}$ en $[1,2)$; $\frac{7}{8}$ en $[2,3)$; 1 si $x \geq 3$. $P(X \leq 1) = \frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 7

Planteamiento. Un test diagnóstico es una aplicación clásica de Bayes. Calculamos la probabilidad total de positivo sumando verdaderos y falsos positivos y después la probabilidad de enfermedad condicionada al positivo.

a. $P(+) = 0{,}01 \cdot 0{,}95 + 0{,}99 \cdot 0{,}10 = 0{,}0095 + 0{,}099 = 0{,}1085$.
b. $P(E \mid +) = \frac{0{,}0095}{0{,}1085} \approx 0{,}0876$, menos del 9 %.
c. Como la enfermedad es rara, los falsos positivos de los muchos sanos superan a los positivos verdaderos de los pocos enfermos.

d. Ahora la probabilidad previa es $0{,}0876$: $\frac{0{,}0876\cdot 0{,}95}{0{,}0876\cdot 0{,}95+0{,}9124\cdot 0{,}10}\approx 0{,}4769$.

Solución del ejercicio 8

Planteamiento. Comprobamos las condiciones de la binomial: número fijo de pruebas independientes con la misma probabilidad de éxito. Aplicamos la fórmula $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ y las expresiones np y $\sqrt{npq}$.

a. Son 5 pruebas independientes con dos resultados (gol o no) y probabilidad de éxito constante 0,8.
b. $P(X=4)=\binom{5}{4}\,0{,}8^4\,0{,}2=0{,}4096$ y $P(X\geq 4)=0{,}4096+0{,}8^5=0{,}7373$.
c. $E(X)=5\cdot 0{,}8=4$ goles y $\sigma=\sqrt{5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}=\sqrt{0{,}8}\approx 0{,}894$.
d. Fallar al menos dos es $X\leq 3$: $1-P(X\geq 4)=0{,}2627$.

Solución del ejercicio 9

Planteamiento. Las llamadas que llegan al azar con una media constante siguen una ley de Poisson, $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. En un intervalo doble la media se duplica, y para dimensionar el servicio acumulamos probabilidades.

a. $P(X=0)=e^{-3}\approx 0{,}0498$.
b. $P(X\geq 2)=1-e^{-3}-3e^{-3}=1-4e^{-3}\approx 0{,}8009$.
c. Poisson de parámetro 6: $P(Y=0)=e^{-6}\approx 0{,}0025$.
d. Acumulando: $P(X\leq 5)\approx 0{,}9161$ y $P(X\leq 6)\approx 0{,}9665$. Debe poder atender 6 llamadas por hora.

Solución del ejercicio 10

Planteamiento. Tipificamos con $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ y usamos la tabla de la normal estándar. Para el percentil hacemos el camino inverso: buscamos en la tabla el valor z y deshacemos la tipificación.

a. $z=\frac{190-176}{7}=2$; $P(Z>2)=1-0{,}9772=0{,}0228$.
b. *P\left(\frac{170-176}{7}*.
c. $z_{0{,}90}\approx 1{,}2816$: $x=176+1{,}2816\cdot 7\approx 185{,}0$ cm.
d. $500\cdot 0{,}0228\approx 11{,}4$: unos 11 jóvenes.

Solución del ejercicio 11

Planteamiento. Definimos la ganancia neta restando lo pagado y escribimos su distribución. La esperanza indica la ganancia media por partida a largo plazo, y un juego es justo cuando esa esperanza vale cero.

a. $G=8$ con probabilidad $\frac{1}{6}$; $G=0$ con $\frac{1}{6}$; $G=-2$ con $\frac{4}{6}$.

b. $E(G) = \frac{8}{6} + 0 - \frac{8}{6} = 0$.
c. Sí, es justo: la ganancia esperada es nula, de modo que ni el jugador ni la feria ganan a largo plazo (aunque en la práctica la feria cobra por el puesto).
d. Ya es justo con 10 €. Si el 5 no devolviera la apuesta, haría falta $\frac{p-2}{6} - \frac{10}{6} = 0$, es decir, que el 6 pagara 12 €.

Solución del ejercicio 12

Planteamiento. Comprobamos que la densidad integra 1 y calculamos probabilidades integrando. La mediana deja la mitad de la probabilidad a cada lado, y la falta de memoria se ve con la probabilidad condicionada.

a. $f \geq 0$ y $\int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-t/2} dt = \left[-e^{-t/2}\right]_0^\infty = 1$.
b. $P(T > 3) = e^{-3/2} \approx 0{,}2231$.
c. $e^{-m/2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 2\ln 2 \approx 1{,}39$ años, menor que la media.
d. $P(T > 5 \mid T > 2) = \frac{e^{-5/2}}{e^{-1}} = e^{-3/2} \approx 0{,}2231$, igual que para una batería nueva: el modelo exponencial no «recuerda» el desgaste, lo que no es realista para baterías.

Solución del ejercicio 13

Planteamiento. El número de pasajeros es binomial con n grande, así que lo aproximamos por una normal con la misma media y desviación típica, aplicando la corrección por continuidad de medio punto.

a. $X \sim B(200;\, 0{,}9)$, $\mu = 180$, $\sigma = \sqrt{18} \approx 4{,}24$.
b. $P(X > 185) \approx P\left(Z > \frac{185{,}5 - 180}{4{,}24}\right) = P(Z > 1{,}30) \approx 0{,}0974$.
c. Hace falta $\frac{185{,}5 - 0{,}9n}{\sqrt{0{,}09n}} \geq 2{,}326$. Probando: $n = 195$ da $z \approx 2{,}39$ y $n = 196$ da $z \approx 2{,}17$. Máximo: 195 billetes.
d. Alrededor de un 9,7 % de los vuelos tendría más pasajeros que plazas y habría que compensar a los afectados.

Solución del ejercicio 14

Planteamiento. La constante se obtiene imponiendo que la integral de la densidad sea 1. Las probabilidades son áreas bajo la densidad, y la esperanza y la varianza se calculan con integrales de $xf(x)$ y $x^2 f(x)$.

a. $\int_0^2 kx(2-x)dx = k\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = k \cdot \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$.
b. $\int_0^1 \frac{3}{4}x(2-x)dx = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$, por la simetría de la densidad respecto de $x = 1$.
c. $E(X) = \int_0^2 \frac{3}{4}x^2(2-x)dx = 1$ h; $E(X^2) = \frac{6}{5}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$.

d. $\int_{1{,}5}^{2} \frac{3}{4}x(2-x)dx = \frac{5}{32}$.

Solución del ejercicio 15

Planteamiento. En serie, el sistema funciona si funcionan todos los componentes: se multiplican las probabilidades. En paralelo falla solo si fallan todos, y conviene calcular el complementario.

a. $P_A = 0{,}9^3 = 0{,}729$.
b. Falla solo si fallan los tres: $P_B = 1 - 0{,}1^3 = 0{,}999$.
c. $P_C = 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}1^2) = 0{,}891$.
d. $P_B > P_C > P_A$. Los tres usan el mismo número de componentes; el paralelo da más seguridad a cambio de capacidad redundante que no se aprovecha.
e. $1 - 0{,}1^n \geq 0{,}9999 \iff 0{,}1^n \leq 10^{-4} \iff n \geq 4$.

Solución del ejercicio 16

Planteamiento. Analizamos el problema con un diagrama de árbol según la elección inicial, teniendo en cuenta que el presentador siempre abre una puerta sin premio. Así comparamos las estrategias de cambiar y de no cambiar.

a. $\frac{1}{3}$: su elección inicial no se ve afectada por lo que hace después el presentador.
b. Si al principio elige el coche (prob. $\frac{1}{3}$), al cambiar pierde. Si elige una puerta vacía (prob. $\frac{2}{3}$), el presentador abre la otra vacía y al cambiar gana. Luego $P(\text{ganar} \mid \text{cambia}) = \frac{2}{3}$.
c. Cambiar equivale a quedarse con las dos puertas no elegidas, de las que el presentador ya ha descartado la vacía.
d. Sin cambiar: $\frac{1}{10}$. Cambiando: $\frac{9}{10}$.

Solución del ejercicio 17

Planteamiento. Es más sencillo calcular la probabilidad del complementario, que todos los cumpleaños sean distintos, multiplicando las probabilidades de que cada persona no coincida con las anteriores.

a. $\frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots 343}{365^{23}} \approx 0{,}4927$.
b. $1 - 0{,}4927 \approx 0{,}5073$: algo más del 50 %.
c. Calculando para varios n: con 41 estudiantes la probabilidad es $\approx 0{,}9032$. Hacen falta 41.
d. Porque no se busca a alguien que coincida con una persona concreta, sino cualquier pareja: con 23 personas hay $\binom{23}{2} = 253$ parejas posibles.

Solución del ejercicio 18

Planteamiento. Al extraer sin reemplazamiento de un lote pequeño la distribución es hipergeométrica. La comparamos con la binomial, que supone extracciones independientes, y valoramos la eficacia del plan de control.

a. Hipergeométrica: población 50, 4 «éxitos», muestra de 5 sin reemplazamiento.
b. $P(X=0)=\frac{\binom{46}{5}}{\binom{50}{5}}\approx 0{,}6470$.
c. $0{,}92^5\approx 0{,}6591$: la aproximación es aceptable, aunque la muestra es el 10 % del lote.
d. $P(X=1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{46}{4}}{\binom{50}{5}}\approx 0{,}3081$.
e. Acepta un lote con un 8 % de defectos en dos de cada tres ocasiones: es poco exigente. Aumentar la muestra a 15 piezas reduciría la probabilidad de aceptar a $\frac{\binom{46}{15}}{\binom{50}{15}}\approx 0{,}2274$.

Solución del ejercicio 19

Planteamiento. La suma de normales independientes es normal, con media la suma de las medias y varianza la suma de las varianzas. Después tipificamos para calcular probabilidades y percentiles.

a. Normal con $\mu=50$ y $\sigma=\sqrt{16+9}=5$ minutos.
b. $P(T>60)=P(Z>2)\approx 0{,}0228$.
c. $50+1{,}645\cdot 5\approx 58{,}2$ minutos.
d. Para variables independientes se suman las varianzas, no las desviaciones: los retrasos de un tramo se compensan en parte con los adelantos del otro.

Solución del ejercicio 20

Planteamiento. Demostramos cada propiedad a partir de los axiomas de la probabilidad y de las definiciones de esperanza y varianza, descomponiendo sucesos en partes disjuntas y usando la linealidad de las sumas.

a. $A\cup B$ es la unión disjunta de A y $B\setminus A$, y $P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B)$.
b. .
c. $\sum(ax_i+b)p_i=a\sum x_ip_i+b\sum p_i=aE(X)+b$. Para la varianza, $(aX+b)-E(aX+b)=a(X-E(X))$, y al elevar al cuadrado sale a^2.
d. $E[(X-\mu)^2]=E(X^2)-2\mu E(X)+\mu^2=E(X^2)-\mu^2$.