Soluciones del examen - Números complejos

Curso: Universidad 1 · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

Criterios. Se valora operar con $i^2 = -1$, multiplicar por el conjugado al dividir y aplicar bien la fórmula de segundo grado.

a. $zw = 2 + 4i - 3i - 6i^2 = 8 + i$. Se multiplica término a término y se usa $i^2 = -1$: $-6i^2 = 6$, luego $2 + 6 = 8$ y $4i - 3i = i$.

b. $\frac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-4i-3i+6i^2}{5} = \frac{-4-7i}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de w, $1 - 2i$; el denominador queda $|w|^2 = 1 + 4 = 5$. Comprobación: $\left(-\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i\right)(1 + 2i) = -\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i - \frac{7}{5}i + \frac{14}{5} = 2 - 3i$.

c. $z = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$. El discriminante es -36 y $\sqrt{-36} = 6i$. Las raíces son conjugadas, como corresponde a una ecuación de coeficientes reales; una de ellas es el propio $z = 2 - 3i$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

Criterios. Se valora el paso correcto a forma polar (cuadrante del argumento) y la aplicación de De Moivre.

a. $1 - i = \sqrt{2}_{-\pi/4}$ y $\sqrt{3} + i = 2_{\pi/6}$. $|1 - i| = \sqrt{2}$ y el punto $(1, -1)$ está en el cuarto cuadrante, con argumento $-\frac{\pi}{4}$. $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2$ y $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ en el primer cuadrante: $\theta = \frac{\pi}{6}$.

b. $(\sqrt{2})^8_{-2\pi} = 16$. De Moivre: módulo $(\sqrt{2})^8 = 2^4 = 16$ y argumento $8 \cdot (-\frac{\pi}{4}) = -2\pi$, equivalente a 0. El resultado es real y positivo.

c. $2^6_{\pi} = -64$. Módulo $2^6 = 64$ y argumento $6 \cdot \frac{\pi}{6} = \pi$: un número real negativo. En binómica habría que desarrollar una potencia sexta.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

Criterios. Se valora la fórmula de las raíces, su escritura en binómica y el cálculo del área del triángulo.

a. $-8 = 8_{\pi}$: $2_{\pi/3} = 1 + \sqrt{3}i$, $2_{\pi} = -2$ y $2_{5\pi/3} = 1 - \sqrt{3}i$. Las raíces tienen módulo $\sqrt[3]{8} = 2$ y argumentos $\frac{\pi + 2k\pi}{3}$, con $k = 0, 1, 2$.

b. Un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de radio 2. Las tres tienen módulo 2 y están separadas $\frac{2\pi}{3}$.

c. Lado $2\sqrt{3}$ (distancia entre $1 \pm \sqrt{3}i$); área $\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3} \approx 5{,}20$.
Comprobación: el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio r es $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$, que con $r = 2$ da $3\sqrt{3}$.

Solución del ejercicio 4 (5 puntos)

Criterios. Se valora el cálculo de la impedancia, el desfase, la intensidad y la interpretación del condensador.

a. $Z = 40 + 30i$, $|Z| = 50\,\Omega$. Módulo: $\sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500}$.
b. $\varphi = \arctan\frac{30}{40} \approx 36{,}87^\circ$. Es el argumento de Z.
c. $I = \frac{230}{50} = 4{,}6$ A; $\cos\varphi = 0{,}8$ y $P = 230 \cdot 4{,}6 \cdot 0{,}8 = 846{,}4$ W. La intensidad es $V/|Z|$.
d. $Z = 40 + 30i - 30i = 40\,\Omega$, real; $I = \frac{230}{40} = 5{,}75$ A. El condensador anula el efecto de la bobina y el circuito se comporta como una resistencia pura. Es la situación de resonancia: la intensidad es máxima.

Solución del ejercicio 5 (3 puntos)

Criterios. Se valora traducir la condición a coordenadas cartesianas y completar cuadrados.

a. $(x-3)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2) \iff 3x^2 + 6x + 3y^2 - 9 = 0 \iff x^2 + 2x + y^2 = 3$.
Escribimos $z = x + yi$: $|z - 3|^2 = (x-3)^2 + y^2$ y $|z|^2 = x^2 + y^2$. Se elevan al cuadrado los dos miembros, que son no negativos; al desarrollar, $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4x^2 + 4y^2$.
b. $(x+1)^2 + y^2 = 4$: circunferencia de centro -1 y radio 2. Se completa el cuadrado: $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$. El centro es el punto $(-1, 0)$, es decir, el complejo -1. Comprobación: $z = 1$ cumple $|1 - 3| = 2 = 2|1|$.