Apuntes - Números complejos

Curso: Universidad 1

El cuerpo de los números complejos amplía $\mathbb{R}$ para que toda ecuación polinómica tenga solución. Es una herramienta básica en álgebra, análisis y física, y se usa desde el primer día en Cálculo y Álgebra lineal.

Actividad de introducción

En el siglo XVI, los matemáticos italianos que resolvían ecuaciones de tercer grado se encontraron con raíces cuadradas de números negativos en medio de los cálculos, incluso cuando la solución final era un número real. Al principio los llamaron números imposibles, pero comprobaron que, si se operaba con ellos siguiendo las reglas habituales, se llegaba a resultados correctos. Hoy, los ingenieros eléctricos los usan para calcular corrientes alternas, los programadores de videojuegos para girar figuras y los físicos para describir ondas. ¿Qué número multiplicado por sí mismo da -1? En este tema construiremos ese número y descubriremos que sus propiedades geométricas son tan útiles como las algebraicas.

Forma binómica

Definición: forma binómica

Un número complejo es $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Se llama $a = \operatorname{Re} z$ parte real y $b = \operatorname{Im} z$ parte imaginaria. El **conjugado** es $\bar{z} = a - bi$ y el **módulo** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, con $z\bar{z} = |z|^2$. La suma y el producto siguen las reglas usuales: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Para dividir se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\bar{w}}{|w|^2}$.

Propiedad

Las potencias de i se repiten con periodo 4: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$. Por eso i^n solo depende del resto de dividir n entre 4. Propiedades útiles: , , $|zw| = |z||w|$ y la desigualdad triangular $|z + w| \le |z| + |w|$.

Interpretación geométrica

Definición: interpretación geométrica

Cada complejo $a + bi$ se identifica con el punto (a, b) del plano, llamado plano de Argand. La suma de complejos es la suma de vectores (regla del paralelogramo); el módulo es la distancia al origen y $|z - w|$ es la distancia entre los puntos z y w. El conjugado es la simetría respecto del eje real. Con esto se describen conjuntos del

plano con una sola ecuación compleja: $|z - z_0| = r$ es una circunferencia de centro z_0 y radio r; $|z - z_0| \leq r$ es el disco cerrado correspondiente; $|z - a| = |z - b|$ es la mediatriz del segmento que une a con b.

Propiedad

Multiplicar por i equivale a girar el punto un ángulo recto en sentido antihorario: $i(a + bi) = -b + ai$. Multiplicar por un complejo $re^{i\theta}$ es girar un ángulo θ y ampliar con razón r. Esta lectura geométrica explica por qué las raíces de la unidad forman polígonos regulares y evita cálculos largos en muchos problemas.

Forma polar y exponencial

Definición: forma polar y exponencial

Si $z = a + bi \neq 0$, su **argumento** θ cumple $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ con $r = |z|$. Entonces $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ (fórmula de Euler). Cuidado: $\arctan(b/a)$ solo da el ángulo correcto en los cuadrantes primero y cuarto; en los demás hay que sumar π. Al multiplicar se multiplican los módulos y se suman los argumentos: $r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Teorema: Fórmula de De Moivre

Fórmula de De Moivre: $z^n = r^n e^{in\theta}$. Sirve para calcular potencias grandes y para obtener identidades trigonométricas, como $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

Raíces n-ésimas

Definición: raíces n-ésimas

Las soluciones de $w^n = z = re^{i\theta}$ son exactamente n números: $w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\theta+2k\pi)/n}$, $\quad k = 0, 1, \ldots, n-1$. Están en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ y forman un polígono regular de n lados. La suma de las raíces n-ésimas de la unidad (con $n \geq 2$) vale 0. El **teorema fundamental del álgebra** afirma que todo polinomio complejo de grado n tiene n raíces contando multiplicidades; si los coeficientes son reales, las raíces no reales vienen en pares conjugados.

Método: calcular raíces n-ésimas

1. Escribe el número en forma polar re^{iθ}.
2. Calcula el módulo de las raíces: la raíz n-ésima de r.
3. Calcula los argumentos (θ + 2kπ)/n para k = 0, ..., n−1.
4. Escribe las n raíces y comprueba que forman un polígono regular.

Ejemplo 1

$$\frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{2} = \frac{-1+5i}{2}.$$

Ejemplo 2

Calcular $(1+i)^8$.

Como $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$, $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{2\pi i} = 16$.

Ejemplo 3

Raíces cúbicas de $8i$.

Módulo 2 y argumento $\pi/2$: $w_k = 2e^{i(\pi/6+2k\pi/3)}$, es decir $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$ y $-2i$.

¡Atención!

Escribir $\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{ab}$ (es falso); olvidar que hay n raíces n-ésimas y quedarse con una; calcular mal el argumento en el segundo o tercer cuadrante; confundir $|z|^2$ con z^2.

Fórmula de Euler y aplicaciones

Teorema: fórmula de Euler

Para todo número real θ se cumple $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Se justifica comparando los desarrollos de Taylor de la exponencial, el seno y el coseno. De ella se deducen las expresiones $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ y $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, que convierten muchos problemas de trigonometría en cálculos algebraicos con exponenciales. Con $\theta = \pi$ se obtiene la célebre identidad $e^{i\pi}+1=0$, que relaciona los cinco números más importantes de las matemáticas.

Método: elegir la forma adecuada

1. Para sumar y restar, usa la forma binómica: se suman partes reales e imaginarias.
2. Para multiplicar y dividir, cualquiera sirve, pero la forma polar es más rápida: se multiplican módulos y se suman argumentos.
3. Para potencias, usa siempre la forma polar y la fórmula de De Moivre.
4. Para raíces, usa la forma polar y no olvides las n soluciones, separadas $\frac{2\pi}{n}$.
5. Para pasar de binómica a polar, dibuja el punto antes de calcular el argumento y comprueba el cuadrante.

Ejemplo 4

Calcula $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2025}$.

Primero simplificamos: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$. Entonces la potencia es $i^{2025} = i^{4\cdot 506+1} = i$. Elegir bien el orden de las operaciones evita pasar a forma polar.

Ejemplo 5

Resuelve $z^2 = 3 - 4i$ en forma binómica.

Buscamos $z = a + bi$ con $a^2 - b^2 = 3$ y $2ab = -4$. Además $|z|^2 = |3 - 4i| = 5$, luego $a^2 + b^2 = 5$. Sumando, $a^2 = 4$, y restando, $b^2 = 1$. Como ab, las soluciones son $2 - i$ y $-2 + i$. Comprobación: $(2 - i)^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$.

Ejemplo 6

Una antena de telefonía en Valencia emite una señal cuyo fasor es $5e^{i\pi/4}$ y recibe un eco con fasor $5e^{-i\pi/4}$. ¿Cuál es la señal total?

Sumamos: $5\left(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right) = 10\cos\frac{\pi}{4} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$, un número real: la señal resultante está en fase con la referencia y tiene amplitud $7{,}07$, menor que la suma de amplitudes, 10.

Propiedad: módulo y conjugado

Para todos los complejos z y w se cumple que el conjugado de una suma es la suma de los conjugados y que el conjugado de un producto es el producto de los conjugados. El módulo es multiplicativo, $|zw| = |z||w|$, y verifica la desigualdad triangular $|z + w| \le |z| + |w|$. Un número es real si y solo si coincide con su conjugado, e imaginario puro si y solo si $\overline{z} = -z$. Las partes real e imaginaria se recuperan con $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ e $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$. Estas reglas permiten demostrar muchas identidades sin separar nunca la parte real de la imaginaria, lo que ahorra cálculos largos y errores de signo.

Geometría con números complejos

Cada número complejo es un punto del plano y, al mismo tiempo, un vector que parte del origen. Sumar complejos equivale a sumar vectores con la regla del paralelogramo, y el módulo de una diferencia $|z - w|$ es la distancia entre los puntos. Multiplicar por un número de módulo 1 es un giro alrededor del origen, y multiplicar por un real positivo es una homotecia. Por eso las transformaciones del plano más habituales se escriben de forma muy compacta: la traslación es $z \mapsto z + b$, el giro de ángulo α alrededor de c es $z \mapsto c + e^{i\alpha}(z - c)$ y la simetría respecto del eje real es $z \mapsto \overline{z}$. Las condiciones

geométricas también se traducen con facilidad: $|z-a|=r$ es una circunferencia, $|z-a|=|z-b|$ es una mediatriz y $\arg(z-a)=\alpha$ es una semirrecta. Los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen son las raíces n-ésimas de un número complejo, y esa simetría explica por qué su suma es cero. Esta forma de trabajar se utiliza en los programas de diseño gráfico, en robótica para describir los movimientos de un brazo articulado y en la cartografía de algunos mapas.

Por qué los complejos son imprescindibles

El teorema fundamental del álgebra garantiza que todo polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces complejas contando multiplicidades. En cambio, en los números reales hay polinomios sin raíces, como x^2+1. Gracias a ello, todo polinomio real se factoriza en factores reales de grado 1 y 2, lo que es la base de la descomposición en fracciones simples que se usa para integrar. En electricidad, las tensiones e intensidades alternas se representan con fasores y la ley de Ohm se escribe $V=ZI$ con una impedancia compleja, lo que convierte ecuaciones diferenciales en cuentas algebraicas. En procesamiento de señales, la transformada de Fourier descompone un sonido o una imagen en sumas de exponenciales complejas; así funcionan la compresión de archivos de música y de fotografía. Y en mecánica cuántica la función de onda de una partícula toma valores complejos.

¡Atención!

El argumento depende del cuadrante: $\arctan\frac{b}{a}$ solo da el ángulo correcto si $a>0$; si a hay que sumar π. Además, las propiedades de las raíces reales no se trasladan: $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=2i\cdot 3i=-6$, y no $\sqrt{36}=6$. Finalmente, $|z+w|\le|z|+|w|$, con igualdad solo si los vectores tienen la misma dirección y el mismo sentido.

¿Sabías que?

Gerolamo Cardano publicó en 1545 la fórmula de las ecuaciones cúbicas y Rafael Bombelli explicó en 1572 cómo operar con raíces de números negativos. La letra i la introdujo Euler en 1777, y la representación de los complejos como puntos del plano se debe a Wessel, Argand y Gauss, a finales del siglo XVIII y principios del XIX.

El consejo de Otto

dibuja siempre el número en el plano de Argand. Si el dibujo y el ángulo no concuerdan, has elegido mal el cuadrante.