Ejercicios - Números complejos

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Operaciones en forma binómica

Sean $z = 3 + 2i$ y $w = 1 - i$.

a. Calcula $z + w$, $z - w$ y zw.
b. Calcula $\dfrac{z}{w}$ multiplicando por el conjugado del denominador.
c. Calcula $|z|$, $\overline{z}$ y comprueba que $z\overline{z} = |z|^2$.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Potencias de i y ecuaciones de segundo grado

Recuerda que $i^2 = -1$ y que las potencias de i se repiten cada cuatro.

a. Calcula i^{2026}, i^{-3} e $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{100}$.
b. Resuelve $z^2 + 2z + 5 = 0$.
c. Resuelve $z^2 = -49$.
d. Escribe una ecuación de segundo grado con coeficientes reales que tenga la solución $3 - 4i$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Paso a forma polar

Representa cada número en el plano complejo y escribe su módulo y su argumento principal $\theta \in (-\pi, \pi]$.

a. $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$
b. $z_2 = -2 + 2i$
c. $z_3 = -3i$
d. Escribe en forma binómica $z_4 = 4_{\pi/6}$ y $z_5 = 2e^{i\,5\pi/4}$.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Producto y cociente en forma polar

Sean $z_1 = 2_{\pi/3}$ y $z_2 = 3_{\pi/6}$.

a. Calcula $z_1 z_2$ en forma polar y en forma binómica.

b. Calcula $\frac{z_1}{z_2}$.
c. Calcula z_1^6.
d. Interpreta geométricamente qué hace multiplicar por z_2.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Fórmula de De Moivre

La fórmula de De Moivre dice que $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

a. Calcula $(1+i)^{10}$ pasando a forma polar.
b. Desarrolla $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ con el binomio de Newton.
c. Igualando partes reales e imaginarias, deduce fórmulas para $\cos 3\theta$ y $\sin 3\theta$.
d. Comprueba la fórmula de $\cos 3\theta$ con $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Raíces n-ésimas

Las n raíces n-ésimas de r_θ son $\sqrt[n]{r}_{(\theta+2k\pi)/n}$, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

a. Calcula las raíces cúbicas de $8i$ en forma binómica.
b. Calcula las raíces cuartas de -16.
c. Comprueba que la suma de las raíces cúbicas de $8i$ es 0.
d. ¿Qué figura forman en el plano las raíces cuartas de -16? Calcula su lado.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Impedancia de un motor

En corriente alterna, una resistencia R y una bobina de reactancia X_L conectadas en serie forman la impedancia $Z = R + iX_L$. Un motor de una lavadora tiene $R = 30\,\Omega$ y $X_L = 40\,\Omega$ y se conecta a la red doméstica de 230 V.

a. Escribe Z en forma binómica y calcula su módulo.
b. Calcula el argumento φ de Z (desfase entre tensión y corriente) en grados.
c. Calcula la intensidad eficaz $I = \frac{V}{|Z|}$.
d. Calcula el factor de potencia $\cos\varphi$ y la potencia activa $P = VI\cos\varphi$.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Girar un personaje en un videojuego

En un videojuego programado en Bilbao, un personaje está dentro del rectángulo de vértices $2+i$, $4+i$, $4+3i$ y $2+3i$. Para girarlo se multiplica cada punto por un número complejo de módulo 1.

a. ¿Por qué número hay que multiplicar para girar 90° en sentido antihorario alrededor del origen? Calcula los nuevos vértices.
b. ¿Y para girar 45°? Calcula la imagen de $4+3i$.
c. Para girar 90° alrededor del centro $c=3+2i$ del rectángulo se usa $z \mapsto c + i(z-c)$. Calcula las imágenes de los vértices.
d. Comprueba que el giro conserva la distancia entre $2+i$ y $4+i$.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La ruta de un velero

Un velero sale del puerto de Palma (origen) y navega 3 millas hacia el este. Después gira 60° a babor (a la izquierda) y navega 2 millas, y finalmente gira otros 30° a babor y navega 2 millas más. Representamos los desplazamientos como números complejos (este = eje real, norte = eje imaginario).

a. Escribe cada tramo como un número complejo en forma exponencial.
b. Calcula la posición final P en forma binómica.
c. Calcula la distancia al puerto y el rumbo directo de regreso.
d. ¿Cuánto más corto es volver en línea recta que deshacer la ruta?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Un logotipo hexagonal

Un estudio de diseño de Sevilla prepara un logotipo con forma de hexágono regular de radio 1 y centro $c=2+i$, con un vértice en $3+i$.

a. Explica por qué los vértices son $c+\omega^k$, con $\omega = e^{i\pi/3}$ y $k=0,\dots,5$.
b. Calcula los seis vértices en forma binómica.
c. Calcula el perímetro del hexágono.
d. El diseñador quiere girar el logotipo 30° alrededor de su centro. Escribe la nueva posición del vértice $3+i$.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Suma de dos ondas sonoras

En un estudio de grabación de Madrid se superponen dos señales de la misma frecuencia: $v_1(t) = 10\cos(\omega t)$ y $v_2(t) = 10\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$. A cada señal $A\cos(\omega t+\varphi)$ se le asocia el fasor $Ae^{i\varphi}$, y la suma de señales corresponde a la suma de fasores.

a. Escribe los fasores de v_1 y v_2 en forma binómica.
b. Suma los fasores y pasa el resultado a forma polar.
c. Escribe la señal suma $v(t)$.
d. ¿Para qué desfase φ la suma de $10\cos\omega t$ y $10\cos(\omega t+\varphi)$ sería nula? ¿Qué aplicación tiene esto en unos auriculares?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Una mirada al conjunto de Mandelbrot

En una clase de informática gráfica se itera $z_{n+1} = z_n^2 + c$ con $z_0 = 0$. El número c pertenece al conjunto de Mandelbrot si la sucesión $|z_n|$ se mantiene acotada.

a. Para $c = i$, calcula $z_1, \ldots, z_5$.
b. ¿La sucesión es acotada? ¿Es periódica a partir de algún término?
c. Para $c = 1$ calcula $z_1, \ldots, z_5$. ¿Qué ocurre?
d. Se demuestra que si algún $|z_n| > 2$, la sucesión diverge. Usa este criterio para decidir sobre $c = 1$ y $c = -1$.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Triángulo equilátero en un parque

En un parque de Salamanca se quiere colocar una fuente en el tercer vértice de un triángulo equilátero cuyos otros dos vértices son dos farolas situadas en 0 y 4 (en decámetros, sobre el plano complejo).

a. Explica por qué el tercer vértice se obtiene girando el punto 4 un ángulo de $\pm 60^\circ$ alrededor de 0.
b. Calcula las dos posiciones posibles.
c. Comprueba que las distancias a las dos farolas son iguales a 4.
d. Calcula el área del triángulo.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Las horas de un reloj

En la esfera de un reloj de la Puerta del Sol de radio 1 situamos el centro en 0 y las 12 en i. Cada marca horaria es una raíz duodécima de la unidad multiplicada por i.

a. ¿Qué ángulo hay entre dos marcas consecutivas? ¿Por qué número hay que multiplicar para pasar de una hora a la siguiente (sentido horario)?
b. Calcula la posición de las 3, las 4 y las 7.
c. La aguja de las horas tarda 12 horas en dar la vuelta. ¿Qué número complejo describe la punta a las t horas?
d. ¿Cuántas veces al día forman las agujas de horas y minutos un ángulo de 180°? (Pista: compara sus velocidades angulares.)

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: factorizar con números complejos

Un estudiante de ingeniería necesita descomponer $\dfrac{1}{x^4 + 4}$ en fracciones simples para calcular una integral, y para ello debe factorizar $x^4 + 4$ en polinomios reales. Las raíces

reales no existen, pero las complejas sí. Sigue los pasos.

a. Escribe -4 en forma polar y calcula las cuatro raíces de $z^4 = -4$.
b. Agrupa las raíces en pares conjugados.
c. Multiplica cada par $(x - z)(x - \overline{z})$ para obtener polinomios reales de grado 2.
d. Escribe la factorización de $x^4 + 4$ y compruébala desarrollando.
e. Justifica por qué un polinomio real de grado impar tiene siempre al menos una raíz real.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: lugares geométricos

Muchas curvas del plano se describen con condiciones sobre $z = x + iy$. Identifica cada conjunto, escribe su ecuación cartesiana y dibújalo.

a. $\{z : |z - 1| = |z + i|\}$.
b. $\{z : |z - 2i| \leq 1\}$.
c. $\{z : \operatorname{Re}(z^2) = 1\}$.
d. $\{z \neq 0 : \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\}$.
e. ¿Cuál de los cuatro conjuntos es acotado? Justifica.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: una ecuación con el conjugado

Se busca resolver $z^2 = \overline{z}$. Un compañero dice que «como es de grado 2, tiene como mucho dos soluciones». Comprobemos si tiene razón.

a. Escribe $z = x + iy$ y separa partes real e imaginaria para obtener un sistema.
b. Resuelve el sistema.
c. Resuélvelo de nuevo en forma polar $z = re^{i\theta}$.
d. ¿Tenía razón el compañero? Explica por qué el teorema fundamental del álgebra no se aplica.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: el coseno de 72 grados

Las raíces quintas de la unidad $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, con $\omega = e^{2\pi i/5}$, son los vértices de un pentágono regular, como el de muchas baldosas de la Alhambra.

a. Demuestra que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ (usa la suma de una progresión geométrica).
b. Tomando partes reales, deduce que $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$.
c. Con $c = \cos\frac{2\pi}{5}$ y $\cos\frac{4\pi}{5} = 2c^2 - 1$, obtén la ecuación $4c^2 + 2c - 1 = 0$.
d. Resuélvela y justifica cuál de las raíces es $\cos 72^\circ$.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: un circuito que parece una resistencia

En la instalación de una vivienda de Córdoba hay dos ramas en paralelo: una con impedancia $Z_1 = 10 + 10i\ \Omega$ (resistencia y bobina) y otra con $Z_2 = 10 - 10i\ \Omega$ (resistencia y condensador). La tensión eficaz es de 230 V. La impedancia equivalente de dos ramas en paralelo es $Z = \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

a. Calcula $Z_1 Z_2$ y $Z_1 + Z_2$.
b. Calcula Z. ¿Qué tiene de especial?
c. Calcula la intensidad total y la intensidad en cada rama, $I_k = \frac{230}{|Z_k|}$.
d. Compara la suma de las intensidades de las ramas con la total. ¿Hay contradicción? Explícalo con fasores.
e. ¿Por qué interesa a una compañía eléctrica que las instalaciones se comporten como resistencias puras?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: identidades y raíces de la unidad

Demuestra los resultados siguientes con el álgebra de los números complejos.

a. Ley del paralelogramo: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$, usando $|u|^2 = u\,\overline{u}$.
b. Si $\omega \neq 1$ es raíz n-ésima de la unidad, $1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.
c. $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega^k)$ con $\omega = e^{2\pi i/n}$. Deduce que el producto de las distancias del punto 1 a los otros $n-1$ vértices del polígono regular es n.
d. Comprueba el resultado anterior para $n = 4$.