Soluciones - Números complejos

Curso: Universidad 1

Solución del ejercicio 1

Planteamiento. En forma binómica se opera como con polinomios en i, sustituyendo $i^2 = -1$. Para dividir multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, que lo convierte en el número real $|w|^2$.

a. $z + w = 4 + i$; $z - w = 2 + 3i$; $zw = 3 - 3i + 2i - 2i^2 = 3 - i + 2 = 5 - i$.

b. $\dfrac{3+2i}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{3 + 3i + 2i + 2i^2}{1 - i^2} = \dfrac{1 + 5i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$.

c. $|z| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, $\overline{z} = 3 - 2i$ y $z\overline{z} = 9 - 6i + 6i - 4i^2 = 13 = |z|^2$.

Solución del ejercicio 2

Planteamiento. Las potencias de i se repiten cada cuatro, así que basta con el resto de dividir el exponente entre 4. Las ecuaciones de segundo grado se resuelven con la fórmula habitual, escribiendo la raíz de un número negativo con i.

a. $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, luego $i^{2026} = i^2 = -1$. $i^{-3} = \dfrac{1}{i^3} = \dfrac{1}{-i} = i$. La suma de cuatro potencias consecutivas es $i - 1 - i + 1 = 0$, y 100 es múltiplo de 4: la suma vale 0.

b. $z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$.

c. $z = \pm 7i$, porque $(7i)^2 = 49i^2 = -49$.

d. Con coeficientes reales, la conjugada $3 + 4i$ también es solución: $(z - 3 + 4i)(z - 3 - 4i) = (z-3)^2 + 16 = z^2 - 6z + 25 = 0$.

Solución del ejercicio 3

Planteamiento. El módulo es la distancia al origen, $\sqrt{a^2 + b^2}$. Para el argumento dibujamos el punto, calculamos el ángulo de referencia con la tangente y lo colocamos en el cuadrante correcto. Para volver a binómica usamos $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

a. $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$; está en el primer cuadrante y $\tan\theta = \sqrt{3}$, luego $\theta = \frac{\pi}{3}$: $z_1 = 2_{\pi/3}$.

b. $|z_2| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; segundo cuadrante, $\tan\theta = -1$, luego $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (no $-\frac{\pi}{4}$, que está en el cuarto cuadrante).

c. $|z_3| = 3$ y el punto está sobre el semieje imaginario negativo: $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

d. $z_4 = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3} + 2i$. $z_5 = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$.

Solución del ejercicio 4

Planteamiento. En forma polar, el producto multiplica los módulos y suma los argumentos, y el cociente divide los módulos y resta los argumentos. Las potencias son productos repetidos, y multiplicar por un complejo equivale a girar y ampliar.

a. Se multiplican módulos y se suman argumentos: $z_1 z_2 = 6_{\pi/2} = 6i$.
b. Se dividen módulos y se restan argumentos: $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{2}{3}\right)_{\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$.
c. $z_1^6 = 2^6_{6\pi/3} = 64_{2\pi} = 64$.
d. Multiplicar por z_2 es girar $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ en sentido antihorario y ampliar por 3 desde el origen.

Solución del ejercicio 5

Planteamiento. Pasamos a forma polar y aplicamos De Moivre, $(r_\theta)^n = (r^n)_{n\theta}$. Para obtener fórmulas trigonométricas desarrollamos el binomio de Newton e igualamos partes reales e imaginarias con las de $\cos n\theta + i \sin n\theta$.

a. $1 + i = \sqrt{2}_{\pi/4}$, así que $(1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}_{10\pi/4} = 32_{5\pi/2} = 32_{\pi/2} = 32i$.
b. $\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$.
c. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ y $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.
d. $\cos\pi = -1$ y $4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$. Correcto.

Solución del ejercicio 6

Planteamiento. Escribimos el número en forma polar y aplicamos la fórmula de las raíces: módulo $\sqrt[n]{r}$ y argumentos $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$, con $k = 0, \ldots, n-1$. Las n raíces forman un polígono regular centrado en el origen.

a. $8i = 8_{\pi/2}$; raíces $2_{\pi/6} = \sqrt{3} + i$, $2_{5\pi/6} = -\sqrt{3} + i$ y $2_{3\pi/2} = -2i$.
b. $-16 = 16_\pi$; raíces $2_{\pi/4}, 2_{3\pi/4}, 2_{5\pi/4}, 2_{7\pi/4}$, es decir $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\,i$.
c. $(\sqrt{3} + i) + (-\sqrt{3} + i) + (-2i) = 0$.
d. Un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio 2. Su lado es la distancia entre $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, que vale $2\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 7

Planteamiento. En corriente alterna, la impedancia es un número complejo: su módulo relaciona tensión e intensidad y su argumento es el desfase. Calculamos módulo y argumento y aplicamos las fórmulas de la intensidad y de la potencia activa.

a. $Z = 30 + 40i$ y $|Z| = \sqrt{900 + 1600} = 50\,\Omega$.

b. $\varphi = \arctan \frac{40}{30} \approx 53{,}13^\circ$.
c. $I = \frac{230}{50} = 4{,}6$ A.
d. $\cos \varphi = \frac{30}{50} = 0{,}6$ y $P = 230 \cdot 4{,}6 \cdot 0{,}6 = 634{,}8$ W.

Solución del ejercicio 8

Planteamiento. Multiplicar por un complejo de módulo 1 es girar alrededor del origen. Para girar alrededor de otro punto c trasladamos c al origen, giramos y deshacemos la traslación: $z \mapsto c + e^{i\alpha}(z - c)$.

a. Por $i = 1_{\pi/2}$: $i(2+i) = -1+2i$, $i(4+i) = -1+4i$, $i(4+3i) = -3+4i$, $i(2+3i) = -3+2i$.
b. Por $e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$: $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(4+3i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+7i) \approx 0{,}71 + 4{,}95i$.
c. $2+i \mapsto 3+2i+i(-1-i) = 4+i$; $4+i \mapsto 3+2i+i(1-i) = 4+3i$; $4+3i \mapsto 3+2i+i(1+i) = 2+3i$; $2+3i \mapsto 3+2i+i(-1+i) = 2+i$. El rectángulo, que es un cuadrado de lado 2, se transforma en sí mismo.
d. Antes: $|(4+i)-(2+i)| = 2$. Después (apartado a): $|(-1+4i)-(-1+2i)| = |2i| = 2$. Se conserva porque $|i| = 1$.

Solución del ejercicio 9

Planteamiento. Cada tramo del recorrido es un número complejo de módulo igual a la distancia y argumento igual al rumbo acumulado. La posición final es la suma de los tramos; su módulo es la distancia al puerto y su argumento indica la dirección.

a. Tramos: 3, $2e^{i\pi/3}$ y $2e^{i\pi/2} = 2i$.
b. $P = 3 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 2i = 4 + (2+\sqrt{3})i \approx 4 + 3{,}73i$.
c. $|P| = \sqrt{16 + (2+\sqrt{3})^2} \approx 5{,}47$ millas. El argumento de P es $\arctan \frac{3{,}73}{4} \approx 43{,}0^\circ$; para volver hay que navegar en la dirección opuesta, $43{,}0^\circ + 180^\circ$, es decir hacia el suroeste.
d. La ruta mide $3+2+2 = 7$ millas; la vuelta directa, unas 5,47 millas: unas 1,53 millas menos.

Solución del ejercicio 10

Planteamiento. Las raíces sextas de la unidad forman un hexágono regular de radio 1 centrado en el origen; sumando el centro lo trasladamos. Para girar el logotipo multiplicamos por $e^{i\pi/6}$ respecto de su centro.

a. Las raíces sextas de la unidad ω^k forman un hexágono regular de radio 1 centrado en 0; sumar c lo traslada.
b. $3+i$, $\frac{5}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$, $\frac{3}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$, $1+i$, $\frac{3}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$, $\frac{5}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$.
c. El lado es $|\omega - 1| = |e^{i\pi/3} - 1| = 1$, luego el perímetro es 6.

d. $c + e^{i\pi/6}(3 + i - c) = 2 + i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \approx 2{,}87 + 1{,}5i$.

Solución del ejercicio 11

Planteamiento. Cada señal sinusoidal de la misma frecuencia se representa por su fasor $Ae^{i\varphi}$, y sumar señales equivale a sumar fasores. El módulo de la suma es la amplitud de la señal resultante y el argumento, su fase.

a. 10 y $10e^{i\pi/3} = 5 + 5\sqrt{3}\,i$.
b. $15 + 5\sqrt{3}\,i$, de módulo $\sqrt{225 + 75} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32$ y argumento $\arctan \frac{5\sqrt{3}}{15} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.
c. $v(t) = 10\sqrt{3}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$.
d. Cuando $1 + e^{i\varphi} = 0$, es decir $\varphi = \pi$: las ondas están en oposición de fase. Es el principio de la cancelación activa de ruido.

Solución del ejercicio 12

Planteamiento. Iteramos la fórmula $z_{n+1} = z_n^2 + c$ calculando con cuidado cada cuadrado en forma binómica. Observamos si la sucesión se repite o crece sin límite, usando el criterio de que si algún módulo supera 2 la sucesión diverge.

a. $z_1 = i$, $z_2 = i^2 + i = -1 + i$, $z_3 = (-1 + i)^2 + i = -2i + i = -i$, $z_4 = (-i)^2 + i = -1 + i$, $z_5 = -i$.
b. Sí: a partir de z_2 alterna entre $-1 + i$ y $-i$, con módulos $\sqrt{2}$ y 1. Por tanto i pertenece al conjunto.
c. $0, 1, 2, 5, 26, 677$: crece sin límite.
d. Para $c = 1$, $|z_3| = 5 > 2$: diverge, no pertenece. Para $c = -1$: $0, -1, 0, -1, \ldots$, acotada, sí pertenece.

Solución del ejercicio 13

Planteamiento. En un triángulo equilátero, cada lado se obtiene girando otro 60° alrededor de un vértice común. Multiplicamos por $e^{\pm i\pi/3}$, comprobamos las distancias con el módulo y calculamos el área con base y altura.

a. En un triángulo equilátero, el lado tiene la misma longitud que y forma con él 60°.
b. $4e^{\pm i\pi/3} = 4\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 \pm 2\sqrt{3}\,i$.
c. $|2 + 2\sqrt{3}i| = \sqrt{4 + 12} = 4$ y $|(2 + 2\sqrt{3}i) - 4| = |-2 + 2\sqrt{3}i| = 4$.
d. Base 4 y altura $2\sqrt{3}$: área $= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ dam², es decir unos 693 m².

Solución del ejercicio 14

Planteamiento. Las marcas horarias son raíces duodécimas de la unidad giradas para que las 12 queden arriba. Pasar de una hora a la siguiente es multiplicar por $e^{-i\pi/6}$, y la posición de las agujas se describe con exponenciales complejas.

a. $360^\circ/12 = 30^\circ$; en sentido horario se multiplica por $e^{-i\pi/6}$.
b. Las 3: $ie^{-i\pi/2} = 1$. Las 4: $ie^{-2i\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Las 7: $ie^{-7i\pi/6} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
c. $h(t) = ie^{-i\pi t/6}$.
d. El minutero gira 12 veces más rápido: el ángulo relativo avanza 330° por hora, y se alcanza la oposición cada $\frac{12}{11}$ h. En 24 h: $24 \cdot \frac{11}{12} = 22$ veces.

Solución del ejercicio 15

Planteamiento. Calculamos las cuatro raíces complejas del polinomio en forma polar. Como el polinomio tiene coeficientes reales, las raíces aparecen en pares conjugados, y cada par da un factor real de grado 2 al multiplicar $(x - z)(x - \overline{z})$.

a. $-4 = 4_\pi$. Raíces: $\sqrt{2}_{\pi/4} = 1 + i$, $\sqrt{2}_{3\pi/4} = -1 + i$, $\sqrt{2}_{5\pi/4} = -1 - i$, $\sqrt{2}_{7\pi/4} = 1 - i$.
b. $\{1 + i,\, 1 - i\}$ y $\{-1 + i,\, -1 - i\}$.
c. $(x - 1 - i)(x - 1 + i) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$ y $(x + 1 - i)(x + 1 + i) = x^2 + 2x + 2$.
d. $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$. Desarrollando: $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x^3 - 4x^2 - 4x + 2x^2 + 4x + 4 = x^4 + 4$.
e. Las raíces no reales van en pares conjugados, así que su número es par. Si el grado es impar, queda al menos una raíz que es su propia conjugada, es decir, real.

Solución del ejercicio 16

Planteamiento. Escribimos $z = x + iy$ y traducimos cada condición sobre módulos o partes reales a una ecuación cartesiana. Reconocemos después la figura (recta, círculo, hipérbola o circunferencia) completando cuadrados si hace falta.

a. Puntos que equidistan de 1 y de $-i$: $(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2 \iff -2x = 2y \iff y = -x$. Es la mediatriz del segmento.
b. $x^2 + (y - 2)^2 \le 1$: el círculo (disco) de centro $(0, 2)$ y radio 1.
c. $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, luego $x^2 - y^2 = 1$: una hipérbola equilátera.
d. $\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$; la condición es $\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \iff x^2 - 2x + y^2 = 0 \iff (x - 1)^2 + y^2 = 1$, circunferencia de centro 1 y radio 1, sin el origen.
e. Solo el disco y la circunferencia lo son (están dentro de un círculo); la recta y la

hipérbola se extienden hasta el infinito.

Solución del ejercicio 17

Planteamiento. Separamos partes real e imaginaria para obtener un sistema real, o trabajamos en forma polar igualando módulos y argumentos. Ambos caminos deben dar las mismas soluciones y muestran que la ecuación no es polinómica.

a. $x^2 - y^2 + 2ixy = x - iy$: $x^2 - y^2 = x$ y $2xy = -y$.
b. De la segunda, $y = 0$ o $x = -\frac{1}{2}$. Si $y = 0$: $x^2 = x$, $x = 0$ o 1. Si $x = -\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soluciones: $0,\ 1,\ -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
c. $r^2 e^{2i\theta} = re^{-i\theta}$. O bien $r = 0$, o bien $r = 1$ y $e^{3i\theta} = 1$: las tres raíces cúbicas de la unidad. Total: 4 soluciones.
d. No. $\overline{z}$ no es un polinomio en z, así que la ecuación no es polinómica y el teorema fundamental del álgebra no limita el número de soluciones.

Solución del ejercicio 18

Planteamiento. La suma de las raíces quintas de la unidad es cero por ser una progresión geométrica. Tomando partes reales y usando la fórmula del ángulo doble obtenemos una ecuación de segundo grado cuya raíz positiva es $\cos 72^\circ$.

a. $\sum_{k=0}^{4} \omega^k = \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} = 0$ porque $\omega^5 = 1$ y $\omega \neq 1$.
b. $\operatorname{Re}\omega^k = \cos\frac{2k\pi}{5}$, y $\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\frac{4\pi}{5}$.
c. $1 + 2c + 2(2c^2 - 1) = 0 \iff 4c^2 + 2c - 1 = 0$.
d. $c = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Como 72° es agudo, $c > 0$: $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}309$.

Solución del ejercicio 19

Planteamiento. Calculamos la impedancia equivalente de dos ramas en paralelo con la fórmula del producto entre la suma, operando con complejos. Interpretamos el resultado con fasores, porque las intensidades desfasadas no se suman como números reales.

a. $Z_1 Z_2 = 100 + 100 = 200$ y $Z_1 + Z_2 = 20$.
b. $Z = \frac{200}{20} = 10\,\Omega$: es real. El efecto de la bobina y el del condensador se compensan (resonancia).
c. $I = \frac{230}{10} = 23$ A. $|Z_1| = |Z_2| = 10\sqrt{2}$, luego $I_1 = I_2 = \frac{230}{10\sqrt{2}} \approx 16{,}26$ A.
d. $16{,}26 + 16{,}26 \approx 32{,}5 \neq 23$, pero no hay contradicción: las intensidades son fasores desfasados -45° y $+45^\circ$; su suma vectorial es $2 \cdot 16{,}26 \cos 45^\circ = 23$ A.
e. Con factor de potencia 1 toda la corriente transporta energía útil; si no, circula corriente reactiva que calienta los cables sin hacer trabajo.

Solución del ejercicio 20

Planteamiento. Usamos que $|w|^2 = w\,\overline{w}$ para desarrollar los módulos sin separar partes real e imaginaria, y la factorización $z^n - 1 = \prod(z - \omega^k)$ para relacionar las raíces de la unidad con distancias en el polígono regular.

a. $|a+b|^2 = (a+b)(\overline{a}+\overline{b})$ y $|a-b|^2 = (a-b)(\overline{a}-\overline{b})$. Sumando se cancelan los términos cruzados.

b. Es una progresión geométrica: $\frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$.

c. Dividiendo por $z - 1$: $\prod_{k=1}^{n-1}(z - \omega^k) = 1 + z + \cdots + z^{n-1}$. Con $z = 1$ y tomando módulos: $\prod_{k=1}^{n-1} |1 - \omega^k| = n$.

d. Vértices $i, -1, -i$: distancias $|1 - i| = \sqrt{2}$, $|1 + 1| = 2$, $|1 + i| = \sqrt{2}$; producto $\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4$.