Soluciones del examen - Matrices y sistemas lineales

Curso: Universidad 1 · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

Criterios. Se valora el cálculo del determinante y de la inversa, la comprobación y el lado correcto de la multiplicación en la ecuación matricial.

a. $\det A = 6 - 5 = 1$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Para una matriz 2×2, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; existe porque $\det A \neq 0$.

b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por ejemplo, el elemento (1,1) es $2 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) = 1$ y el (2,1), $5 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) = 0$.

c. Multiplicando por la izquierda por A^{-1}: $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. No vale BA^{-1}: el producto de matrices no es conmutativo. Comprobación: $AX = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 5-3 & -5+6 \end{pmatrix} = B$.

Solución del ejercicio 2 (5 puntos)

Criterios. Se valora el cálculo del determinante, la discusión completa con Rouché-Frobenius y la solución paramétrica.

a. $\det = 1(2k-9) - 1(k-3) + 1(3-2) = k - 5$. Se desarrolla por la primera fila el determinante [redacted].

b. Si $k \neq 5$: compatible determinado. Si $k = 5$: restando, $F_2 - F_1 = (0, 1, 2|3)$ y $F_3 - F_1 = (0, 2, 4|m-3)$; compatible indeterminado si $m - 3 = 6$, es decir $m = 9$, e incompatible si $m \neq 9$. Si $k \neq 5$, el rango es 3, igual al número de incógnitas. Si $k = 5$ y $m = 9$, ambos rangos valen 2, menos que 3 incógnitas; si $m \neq 9$, la matriz tiene rango 2 y la ampliada 3.

c. $y + 2z = 3$, $z = \lambda$: $y = 3 - 2\lambda$, $x = 3 - y - z = \lambda$. Soluciones $(\lambda,\ 3 - 2\lambda,\ \lambda)$. Comprobación con $\lambda = 1$: $(1, 1, 1)$ cumple $1 + 1 + 1 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$ y $1 + 3 + 5 = 9$.

Solución del ejercicio 3 (3 puntos)

Criterios. Se valora aplicar las propiedades de los determinantes sin desarrollar,

justificando cada factor.

a. $\det(3A) = 3^3(-2) = -54$; $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}$. Multiplicar una matriz 3×3 por 3 multiplica cada una de sus 3 filas por 3. Además $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
b. $\det(A^T A) = \det A^T \det A = (-2)^2 = 4$. Se usa $\det(MN) = \det M \det N$ y $\det A^T = \det A$.
c. El intercambio cambia el signo; la suma no lo cambia: $\det B = 2$. Sumar a una fila un múltiplo de otra no altera el determinante; por eso $\det B = -\det A = 2$.

Solución del ejercicio 4 (5 puntos)

Criterios. Se valora el planteamiento del sistema, su resolución ordenada y la interpretación del porcentaje.

a. [redacted] Las incógnitas son x (paseo), y (montaña) y z (eléctricas). La primera ecuación cuenta bicicletas, la segunda la facturación y la tercera relaciona paseo y eléctricas.
b. Sustituyendo $x = 2z$: $y = 30 - 3z$ y $400z + 400(30 - 3z) + 700z = 11400$, es decir $12000 - 100z = 11400$, luego $z = 6$, $x = 12$, $y = 12$. Comprobación: $12 + 12 + 6 = 30$ y $2400 + 4800 + 4200 = 11400$ €.
c. Eléctricas: $6 \cdot 700 = 4200$ €, que es $\frac{4200}{11400} \approx 36{,}8$ % de la facturación. Las eléctricas son solo el 20 % de las unidades, pero aportan más de un tercio de los ingresos.

Solución del ejercicio 5 (3 puntos)

Criterios. Se valora el cálculo de las potencias y la comprobación del producto, usando que $N^3 = 0$.

a. y $N^3 = 0$. Por ejemplo, el elemento (1,3) de N^2 es $0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 3$. En $N^3 = N^2 N$, la única fila no nula de N^2, $(0, 0, 3)$, multiplica a la tercera fila de N, que es nula. N es nilpotente.
b. $(I + N)(I - N + N^2) = I - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I + N^3 = I$. Basta un producto, porque para matrices cuadradas $MX = I$ implica $XM = I$. Es la misma idea que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots$, con la serie cortada porque $N^3 = 0$.