Apuntes - Matrices y sistemas lineales

Curso: Universidad 1

Las matrices y los sistemas lineales son el lenguaje básico del álgebra lineal y aparecen en todas las ingenierías y ciencias. Este tema reúne las operaciones con matrices, la resolución de sistemas por el método de Gauss, el rango, los determinantes y la inversa.

Actividad de introducción

Una cadena de panaderías de Madrid quiere saber cuántas barras, cruasanes y magdalenas puede hornear gastando exactamente la harina, la mantequilla y el azúcar que tiene en el almacén. Cada producto consume una cantidad fija de cada ingrediente, de modo que el problema se traduce en tres ecuaciones con tres incógnitas. Si la cadena tuviera cien productos y cincuenta ingredientes, resolver a mano sería imposible sin un método ordenado. Las matrices permiten guardar todos los datos en una tabla y el método de Gauss da un procedimiento sistemático que también siguen los ordenadores. En este tema aprenderemos a operar con matrices, a decidir si un sistema tiene solución y a calcularla.

Matrices y operaciones

Definición: matrices y operaciones

Una matriz $A \in M_{m\times n}$ tiene m filas y n columnas. La suma se hace término a término; el producto AB exige que las columnas de A coincidan con las filas de B y se calcula $(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj}$. El producto es asociativo y distributivo, pero **no es conmutativo**: en general $AB \neq BA$. También se puede tener $AB = 0$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$. La traspuesta cumple $(AB)^T = B^T A^T$. Una matriz es simétrica si $A^T = A$ y antisimétrica si $A^T = -A$; toda matriz cuadrada es suma de una simétrica y una antisimétrica.

Sistemas lineales y método de Gauss

Definición: sistemas lineales y método de gauss

Un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se resuelve escribiendo la matriz ampliada $(A\,|\,\mathbf{b})$ y reduciéndola a forma escalonada con operaciones elementales por filas (intercambiar, multiplicar por un escalar no nulo, sumar un múltiplo de otra fila). El **rango** es el número de filas no nulas de la forma escalonada. **Teorema de Rouché-Frobenius:** el sistema es compatible si y solo si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|\mathbf{b})$; si además el rango es igual al número de incógnitas n, la solución es única (compatible determinado); si es menor, hay infinitas soluciones con $n - \operatorname{rg} A$ parámetros. Un sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial.

Determinantes

Propiedad

Para 2×2: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$. Para órdenes mayores se desarrolla por una fila o columna con cofactores, o se triangulariza. Propiedades: $\det(AB) = \det A \det B$; $\det A^T = \det A$; intercambiar dos filas cambia el signo; sumar a una fila un múltiplo de otra no cambia el determinante; si se multiplica una fila por λ, el determinante queda multiplicado por λ; por tanto $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ si A es $n \times n$. En matrices triangulares el determinante es el producto de la diagonal.

Inversa

Propiedad

A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$ (equivalentemente, rango máximo). Se calcula por Gauss-Jordan $(A|I) \to (I|A^{-1})$ o con la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)^T$. Para 2×2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Se tiene $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (el orden se invierte). La **regla de Cramer** resuelve sistemas cuadrados con $\det A \neq 0$: $x_i = \det A_i / \det A$.

Método: resolver un sistema por Gauss

1. Escribe la matriz ampliada.
2. Escalona con operaciones elementales por filas.
3. Compara los rangos (Rouché-Frobenius).
4. Resuelve hacia atrás y comprueba en el sistema original.

Ejemplo 1

Resolver $x + y + z = 6,\ 2y + 5z = -4,\ 2x + 5y - z = 27$**.**

Eliminando x de la tercera: $3y - 3z = 15$, es decir $y - z = 5$. De $2y + 5z = -4$: $7z = -14$, $z = -2$, $y = 3$, $x = 5$.

Ejemplo 2

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$**:** $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **pero** $BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$**.**

Ejemplo 3

La inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ tiene determinante $6-5=1$, luego es $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

¡Atención!

Suponer $AB=BA$; escribir $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$; usar $\det(A+B)=\det A+\det B$ (es falso); olvidar que $\det(\lambda A)=\lambda^n \det A$; operar mal con las filas al aplicar Gauss y no comprobar la solución final en el sistema original.

Rango y forma escalonada

Definición: forma escalonada y rango

Una matriz está en forma escalonada si cada fila no nula empieza con un elemento no nulo (el pivote) situado más a la derecha que el pivote de la fila anterior, y las filas nulas están al final. El rango de una matriz es el número de pivotes de cualquier forma escalonada obtenida por operaciones elementales; coincide con el número máximo de filas, o de columnas, linealmente independientes, y también con el orden del mayor menor no nulo. El rango no cambia al trasponer ni al multiplicar por matrices invertibles.

Método: discutir un sistema con parámetros

1. Escribe la matriz de coeficientes A y la ampliada $(A|b)$.
2. Si A es cuadrada, calcula $\det A$ y halla los valores del parámetro que lo anulan.
3. Para los demás valores, $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg}(A|b)=n$: compatible determinado.
4. Para cada valor crítico, sustituye y calcula los rangos por Gauss o por menores.
5. Concluye con Rouché-Frobenius: rangos distintos, incompatible; iguales y menores que n, indeterminado con $n-\operatorname{rg} A$ parámetros.

Ejemplo 4

Calcula el rango de  **.**

La segunda fila es el doble de la primera. Tras F_2-2F_1 y F_3-F_1 quedan las filas $(1,2,3)$, $(0,0,0)$ y $(0,-2,-2)$. Hay dos pivotes, así que el rango es 2. Comprobación: el determinante es 0 y el menor  .

Ejemplo 5

Resuelve la ecuación matricial $XA=B$ con $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Como A es invertible, multiplicamos por la derecha: $X = BA^{-1}$, con $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $X = (2,\ -2+5) = (2,3)$. Comprobación: $(2,3)A = (2,5)$. Hay que respetar el lado: $A^{-1}B$ no tendría ni siquiera sentido aquí.

Ejemplo 6

En un mercado de Valencia, 2 kg de tomates y 1 kg de pimientos cuestan 7 €, y 1 kg de tomates y 3 kg de pimientos cuestan 11 €. Halla los precios.

Sistema $2t + p = 7$, $t + 3p = 11$. Por Cramer: $\Delta = 6 - 1 = 5$, $\Delta_t = 21 - 11 = 10$, $\Delta_p = 22 - 7 = 15$. Así $t = 2$ €/kg y $p = 3$ €/kg.

Método: inversa por Gauss-Jordan

1. Escribe la matriz $(A \mid I)$, con la identidad del mismo orden a la derecha.
2. Con operaciones elementales por filas, consigue ceros debajo de cada pivote, como en Gauss.
3. Continúa haciendo ceros también encima de los pivotes, de abajo arriba.
4. Divide cada fila por su pivote para que la diagonal quede formada por unos.
5. Cuando a la izquierda aparezca I, a la derecha está A^{-1}. Si en algún momento aparece una fila nula a la izquierda, la matriz no es invertible.

Este procedimiento es mucho más rápido que la fórmula de los adjuntos para matrices de orden 3 o superior, y conviene terminar siempre comprobando que el producto AA^{-1} da la identidad, al menos en una fila y una columna, porque un error de signo en una sola operación se propaga a toda la inversa.

Interpretación geométrica de los sistemas

Cada ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano del espacio, y resolver el sistema es buscar los puntos comunes a todos los planos. Si el sistema es compatible determinado, los planos se cortan en un único punto. Si es compatible indeterminado con un parámetro, se cortan a lo largo de una recta, como las páginas de un libro abierto; con dos parámetros, los planos coinciden. Si es incompatible, no hay ningún punto común: puede que dos planos sean paralelos o que se corten dos a dos formando un prisma triangular. El teorema de Rouché-Frobenius traduce estas situaciones geométricas en una comparación de rangos, que se calcula sin dibujar nada. En dos dimensiones la idea es la misma con rectas del plano: se cortan en un punto, coinciden o son paralelas. Esta visión ayuda a detectar errores: si al resolver aparece una solución única pero dos ecuaciones son proporcionales, algo se ha calculado mal.

Aplicaciones de las matrices

Las matrices no son solo tablas de números: representan transformaciones y relaciones. En economía, el modelo de Leontief describe cómo cada sector consume productos de los demás, y la producción necesaria para atender una demanda se obtiene invirtiendo la

matriz $I - T$. En química, ajustar una reacción equivale a resolver un sistema homogéneo. En ingeniería eléctrica, las leyes de Kirchhoff dan sistemas cuya matriz depende de las resistencias del circuito. En informática, las imágenes digitales son matrices de píxeles, y girar, ampliar o deformar una figura en un videojuego consiste en multiplicar por matrices. Las matrices de transición describen cómo se reparte una población entre varios estados de un año al siguiente, y sus potencias permiten predecir el reparto a largo plazo. En todos estos casos, el método de Gauss es el algoritmo de fondo, y su coste crece como el cubo del número de incógnitas: un sistema de mil ecuaciones requiere del orden de mil millones de operaciones, algo que un ordenador portátil hace en menos de un segundo.

¡Atención!

El producto de matrices no es conmutativo, así que en una ecuación matricial hay que multiplicar por la inversa siempre por el mismo lado: de $AX = B$ se obtiene $X = A^{-1}B$, y de $XA = B$ se obtiene $X = BA^{-1}$. Además, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ en general, y $\det(A + B) \neq \det A + \det B$. Al hacer Gauss, una operación como $F_2 \to 3F_2 - F_1$ multiplica el determinante por 3: si se está calculando un determinante, hay que compensarlo.

¿Sabías que?

Un texto chino de hace unos dos mil años, Los nueve capítulos sobre el arte matemático, ya resolvía sistemas de tres ecuaciones disponiendo los coeficientes en una tabla de varillas y eliminando incógnitas, exactamente como en el método que hoy lleva el nombre de Gauss. La palabra matriz la introdujo James Sylvester en 1850, y Arthur Cayley definió poco después el producto de matrices.

El consejo de Otto

al terminar un sistema, sustituye la solución en las ecuaciones originales. Tardas diez segundos y detectas cualquier error de signo.