Ejercicios - Matrices y sistemas lineales

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Operaciones con matrices

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Calcula $A + 2B$.
b. Calcula AB y BA. ¿Conmutan A y B?
c. Comprueba que $(AB)^T = B^T A^T$.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Potencias de una matriz

Sean $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calcula P^2 y P^3.
b. Conjetura P^n y demuéstralo por inducción.
c. Calcula Q^2 y deduce Q^{2025}.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Método de Gauss

Resuelve el sistema por el método de Gauss:



a. Escribe la matriz ampliada.
b. Redúcela a forma escalonada indicando cada operación.
c. Resuelve por sustitución regresiva y comprueba la solución.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Discusión de un sistema con parámetro

Considera el sistema  con $a \in \mathbb{R}$.

a. Calcula el determinante de la matriz de coeficientes y factorízalo.
b. Discute el sistema según los valores de a (teorema de Rouché-Frobenius).
c. Resuélvelo cuando sea compatible determinado.
d. Resuélvelo para $a = 1$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Cálculo de determinantes

Sean y .

a. Calcula $\det C$ desarrollando por la segunda fila.
b. Calcula $\det D$ haciendo ceros con operaciones por filas.
c. Calcula $\det(2C)$, $\det(C^T)$ y $\det(C^{-1})$ sin hacer más productos.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Inversa por Gauss-Jordan

Sea .

a. Justifica que A es invertible.
b. Calcula A^{-1} por el método de Gauss-Jordan $(A|I) \to (I|A^{-1})$.
c. Comprueba que $AA^{-1} = I$ en la primera fila.
d. Usa A^{-1} para resolver $A\mathbf{x} = (3, 2, 2)^T$.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – La compra de fruta en dos fruterías

Tres familias de Murcia compran cada semana kilos de naranjas, fresas y plátanos (matriz Q, una fila por familia). Dos fruterías del barrio tienen los precios por kilo de la matriz P (columnas: frutería 1 y frutería 2).

Q (kg)	Naranjas	Fresas	Plátanos
Familia 1	2	1	3
Familia 2	1	2	1
Familia 3	3	0	2

P (€/kg)	Frutería 1	Frutería 2
Naranjas	1,80	2,00

P (€/kg)	Frutería 1	Frutería 2
Fresas	2,50	2,20
Plátanos	1,20	1,50

a. ¿Qué dimensiones tiene QP y qué significa cada elemento?
b. Calcula QP.
c. ¿En qué frutería le conviene comprar a cada familia?
d. ¿Cuánto ahorran en total si cada familia elige su frutería más barata en lugar de comprar todas en la frutería 2?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – La pastelería de Toledo

Una pastelería de Toledo elabora cajas de mazapán (M), de yemas (Y) y de almendrados (A). Cada caja necesita las cantidades de almendra, azúcar y huevo de la tabla. Hoy dispone de 110 kg de almendra, 75 kg de azúcar y 85 docenas de huevos y quiere gastarlo todo.

Por caja	Almendra (kg)	Azúcar (kg)	Huevo (docenas)
M	2	1	3
Y	3	1	1
A	1	2	1

a. Plantea el sistema lineal con x, y, z cajas de M, Y, A.
b. Resuélvelo por Gauss.
c. Comprueba la solución en las tres ecuaciones.
d. Si al día siguiente solo tiene 100 kg de almendra (el resto igual), ¿cambia la solución? Calcúlala e interprétala.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Flujo de tráfico en Valladolid

Cuatro cruces de un barrio de Valladolid forman un circuito de calles de sentido único. Llamamos x_1, x_2, x_3, x_4 a los vehículos por hora en cada tramo. En cada cruce, los que entran son los que salen. Las ecuaciones de los cruces son: $x_1 - x_4 = 100$, $x_1 - x_2 = 200$, $x_3 - x_2 = 150$ y $x_3 - x_4 = 50$.

a. Escribe la matriz ampliada y calcula su rango y el de la matriz de coeficientes.
b. Clasifica el sistema y resuélvelo tomando $x_4 = t$ como parámetro.
c. Teniendo en cuenta que los flujos no pueden ser negativos, ¿qué valores son posibles para t?
d. Si se corta el tramo 2 por obras ($x_2 = 0$), ¿cuáles son los demás flujos?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Ajuste de una reacción química

En el laboratorio de química de la Universidad de Salamanca se quiere ajustar la combustión del propano: $x\,\mathrm{C_3H_8} + y\,\mathrm{O_2} \to z\,\mathrm{CO_2} + w\,\mathrm{H_2O}$.

a. Plantea un sistema homogéneo igualando átomos de C, H y O.
b. ¿Cuántas incógnitas y cuántas ecuaciones independientes hay? ¿Por qué tiene infinitas soluciones?
c. Resuélvelo y da la solución con los menores enteros positivos.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Un circuito eléctrico

Un circuito de una práctica de electrotecnia tiene una pila de 12 V y tres resistencias de $4\,\Omega$, $2\,\Omega$ y $6\,\Omega$. Las leyes de Kirchhoff dan: $I_1 = I_2 + I_3$, $4I_1 + 2I_2 = 12$ y $2I_2 = 6I_3$ (intensidades en amperios).

a. Escribe el sistema en forma matricial $A\mathbf{I} = \mathbf{b}$.
b. Calcula $\det A$ y deduce que la solución es única.
c. Resuelve el sistema.
d. Calcula la potencia disipada en la resistencia de $4\,\Omega$, $P = 4I_1^2$.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – El modelo de Leontief

Una economía regional de Extremadura tiene dos sectores: agricultura e industria. Para producir 1 € de agricultura se consumen 0,20 € de agricultura y 0,40 € de industria; para 1 € de industria, 0,30 € de agricultura y 0,10 € de industria. La demanda final es de 100 millones de euros de agricultura y 200 de industria.

a. Escribe la matriz técnica T (columna j = consumos del sector j).
b. Plantea la ecuación $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{d}$ y despeja $\mathbf{x}$.
c. Calcula la producción total de cada sector.
d. ¿Qué parte de la producción agrícola se consume dentro de la propia economía?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Un mensaje cifrado con matrices

Un club de criptografía de un instituto de Zaragoza numera las letras A=1, B=2, …, N=14, Ñ=15, O=16, …, Z=27 y cifra cada par de letras $\mathbf{v}$ calculando $K\mathbf{v}$ con $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Cifra la palabra HOLA (pares HO y LA).

b. Calcula K^{-1} y justifica que tiene coeficientes enteros.
c. Descifra el mensaje $(25,\ 13)$, $(45,\ 25)$.
d. ¿Por qué no serviría la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ para cifrar?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Movilidad entre ciudad y área metropolitana

Cada año, el 10 % de los habitantes de una ciudad andaluza se muda al área metropolitana y el 20 % de los del área metropolitana se muda a la ciudad. Hoy hay 600 mil habitantes en la ciudad y 400 mil en el área (población total constante).

a. Escribe la matriz de transición M tal que $\mathbf{p}_{n+1} = M\mathbf{p}_n$.
b. Calcula la distribución dentro de 1 y 2 años.
c. Halla la distribución estacionaria ($M\mathbf{p} = \mathbf{p}$).
d. Interpreta el resultado: ¿crece o decrece la ciudad a largo plazo?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: planificar la producción de un taller

Un taller de muebles de Valencia fabrica mesas, sillas y estanterías. Cada pieza pasa por carpintería, barnizado y montaje con los tiempos de la tabla (en horas). Esta semana hay disponibles 130 h de carpintería, 60 h de barnizado y 100 h de montaje, y el encargado quiere que ningún equipo quede ocioso.

Horas por pieza	Carpintería	Barnizado	Montaje
Mesa	2	1	1
Silla	1	1	2
Estantería	3	1	2

a. Plantea el sistema con x mesas, y sillas y z estanterías.
b. Resuélvelo por la regla de Cramer, calculando los cuatro determinantes.
c. Interpreta la solución.
d. Si el montaje dispusiera de 105 h, ¿cuál sería la solución? ¿Es realizable? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: temperaturas en Granada

Una estación meteorológica de Granada registró 8 °C a las 6:00, 20 °C a las 12:00 y 14 °C a las 18:00. Se busca una parábola $T(h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2$, con h en horas desde las 6:00, que pase por esos tres datos.

a. Plantea el sistema lineal en c_0, c_1, c_2 y escribe su matriz (de Vandermonde).

b. Resuélvelo.
c. Estima la temperatura a las 15:00.
d. Halla la hora de temperatura máxima según el modelo y su valor.
e. ¿Es fiable usar el modelo a las 3:00 de la madrugada siguiente? Justifica.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: mezcla de piensos en una granja

Una granja de Lugo mezcla tres piensos A, B y C. La tabla da los gramos de proteína y de fibra por kilo de cada pienso. Se quiere una mezcla con exactamente 1000 g de proteína y 450 g de fibra.

g por kg	Pienso A	Pienso B	Pienso C
Proteína	10	20	15
Fibra	5	5	10

a. Plantea el sistema con x, y, z kilos de A, B y C.
b. Clasifícalo y resuélvelo en función de $z = \lambda$.
c. ¿Qué valores de λ dan cantidades no negativas?
d. El pienso A cuesta 0,40 €/kg, el B 0,50 €/kg y el C 0,30 €/kg. Escribe el coste en función de λ y halla la mezcla más barata.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: rango según un parámetro

Sea , con $k \in \mathbb{R}$. Un compañero afirma: «el rango de A_k siempre es

3, salvo para un único valor de k». Comprueba si tiene razón.

a. Calcula $\det A_k$ y factorízalo.
b. Determina el rango para cada valor de k.
c. Para $k = 4$, encuentra una relación lineal entre las filas.
d. ¿Tenía razón el compañero? Justifica.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: cuadrados mágicos y sistemas lineales

En un cuadrado mágico 3×3 las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales suman lo mismo, S. Con las 9 casillas $m_1, \ldots, m_9$ y S hay 10 incógnitas y 8 ecuaciones lineales homogéneas.

a. Escribe las 8 ecuaciones.
b. Se comprueba que la matriz del sistema tiene rango 7. ¿Cuántos parámetros libres tiene el conjunto de cuadrados mágicos?

c. Demuestra que la casilla central vale $S/3$ (suma la fila central, la columna central y las dos diagonales, y resta las tres filas).
d. Completa el cuadrado mágico con $S = 15$, $m_1 = 2$, $m_2 = 7$ y comprueba todas las sumas.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: determinante de Vandermonde y matrices idempotentes

Este ejercicio reúne dos resultados teóricos clásicos.

a. Demuestra que  .

b. Deduce que por tres puntos de abscisas distintas pasa una única parábola.
c. Una matriz es idempotente si $A^2 = A$. Demuestra que entonces $\det A \in \{0, 1\}$.
d. Demuestra que si A es idempotente, $I - A$ también lo es, y da un ejemplo 2×2 distinto de 0 y de I.