Soluciones - Matrices y sistemas lineales

Curso: Universidad 1

Solución del ejercicio 1

Planteamiento. La suma y el producto por un escalar se hacen término a término. El producto AB se calcula fila por columna: el elemento (i, j) es la fila i de A por la columna j de B. Comparar AB con BA muestra que el producto no es conmutativo.

a. $A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, sumando término a término.

b. Fila por columna: $AB = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, por ejemplo $(AB)_{11} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$. En cambio $BA = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Como $AB \neq BA$, no conmutan.

c. $(AB)^T = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ y $B^T A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$: coinciden, como afirma la propiedad.

Solución del ejercicio 2

Planteamiento. Calculamos las primeras potencias para descubrir una regularidad, la escribimos como conjetura y la demostramos por inducción. Para la matriz Q basta ver que $Q^2 = I$: entonces las potencias pares valen I y las impares valen Q.

a. $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^3 = P^2 P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Conjetura: $P^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Base: $n = 1$ es cierto. Paso: si $P^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $P^{n+1} = P^n P = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que es la fórmula para $n + 1$.

c. $Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Como $2025 = 2 \cdot 1012 + 1$, $Q^{2025} = (Q^2)^{1012} Q = Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 3

Planteamiento. El método de Gauss transforma la matriz ampliada en una escalonada mediante operaciones elementales por filas, que no cambian las soluciones. Después se despejan las incógnitas de abajo arriba y se comprueba la solución en las ecuaciones originales.

a. .

b. $F_2 - 2F_1$: $(0, -3, -1 \mid -9)$; $F_3 - F_1$: $(0, 1, -2 \mid -4)$. Intercambiamos para trabajar con el pivote 1 y hacemos $3F_3 + F_2$: $(0, 0, -7 \mid -21)$. Forma escalonada:



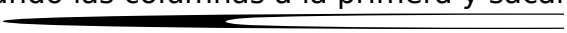
.

c. $-7z = -21 \Rightarrow z = 3$; $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$; $x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$. Comprobación: $2 - 2 + 3 = 3$ y $1 + 4 - 3 = 2$. Solución $(1, 2, 3)$.

Solución del ejercicio 4

Planteamiento. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes, que depende del parámetro. Donde no se anula, el sistema es compatible determinado; en cada valor que lo anula sustituimos y comparamos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

a. Sumando las columnas a la primera y sacando factor común:



.

b. Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = 3$, sistema compatible determinado. Si $a = 1$: las tres ecuaciones son $x + y + z = 1$, rango 1 en ambas matrices, compatible indeterminado con 2 parámetros. Si $a = -2$: sumando las tres ecuaciones queda $0 = 3$; $\operatorname{rg} A = 2 \neq \operatorname{rg}(A|b) = 3$, incompatible.

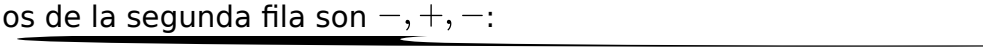
c. Por simetría $x = y = z$; sustituyendo, $(a + 2)x = 1$, así que $x = y = z = \dfrac{1}{a + 2}$.

d. $x = 1 - \lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: es un plano de soluciones.

Solución del ejercicio 5

Planteamiento. Para el determinante de orden 3 desarrollamos por la fila que tiene un cero, respetando los signos de los adjuntos. En el de orden 4 hacemos ceros con operaciones que no cambian el determinante. Las propiedades permiten el último apartado sin más productos.

a. Los signos de la segunda fila son $-, +, -$:



.

b. $F_3 - 2F_1$ da la fila $(0, 0, 1, 0)$ y $F_4 - F_1$ da $(0, -2, 0, 2)$. Desarrollando por la columna 1 queda  , y por la segunda fila: . Así $\det D = 2$.

c. $\det(2C) = 2^3 \det C = -80$; $\det(C^T) = \det C = -10$; $\det(C^{-1}) = \dfrac{1}{\det C} = -\frac{1}{10}$.

Solución del ejercicio 6

Planteamiento. Una matriz es invertible si su determinante no es nulo. Para calcular la inversa escribimos $(A|I)$ y aplicamos Gauss-Jordan hasta obtener $(I|A^{-1})$. La inversa permite resolver el sistema multiplicando: $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

a. $\det A = 1 \cdot (1-0) - 2 \cdot (0-1) + 0 = 3 \neq 0$.
b. $F_3 - F_1$; $F_3 + 2F_2$ da $(0, 0, 3 \mid -1, 2, 1)$; dividiendo y subiendo:

.

c. Fila $(1, 2, 0)$ por la columna 1 de A^{-1}: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$; por la columna 2: $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$; por la columna 3: $\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$. Se obtiene $(1, 0, 0)$, la primera fila de I.

d. . Comprobación: $1 + 2 \cdot 1 = 3$, $1 + 1 = 2$, $1 + 1 = 2$.

Solución del ejercicio 7

Planteamiento. Organizamos los datos en matrices y comprobamos que el producto tiene sentido (columnas de la primera igual a filas de la segunda). Cada elemento del producto es un gasto total; comparando las dos columnas decidimos la frutería más barata para cada familia.

a. Q es 3×3 y P es 3×2, así que QP es 3×2: el elemento (i, j) es el gasto de la familia i en la frutería j.

b. euros. Por ejemplo, la familia 1 en la frutería 1 gasta

$2 \cdot 1{,}8 + 1 \cdot 2{,}5 + 3 \cdot 1{,}2 = 9{,}7$ €.

c. Familia 1: frutería 1 ($\frac{97}{10}$). Familia 2: frutería 2 ($\frac{79}{10}$). Familia 3: frutería 1 ($\frac{39}{5}$). No hay una frutería mejor para todas: depende de lo que compra cada una.
d. Todas en la frutería 2: $\frac{107}{10} + \frac{79}{10} + 9 = \frac{138}{5}$ €. Eligiendo la más barata: $\frac{97}{10} + \frac{79}{10} + \frac{39}{5} = \frac{127}{5}$ €. Ahorro: $\frac{11}{5}$ €.

Solución del ejercicio 8

Planteamiento. Cada ingrediente da una ecuación: la cantidad que gastan las cajas debe coincidir con la disponible. Resolvemos el sistema de tres ecuaciones por Gauss, comprobamos la solución y analizamos si tiene sentido real (cajas enteras y no negativas).

a. 

b. Con F_2 como pivote: $F_1 - 2F_2$ da $y - 3z = -40$ y $F_3 - 3F_2$ da $-2y - 5z = -140$. Sumando a la última el doble de la anterior: $-11z = -220$, así que $z = 20$. Entonces $y = 3z - 40 = 20$ y $x = 75 - y - 2z = 15$.
c. Almendra: $30 + 60 + 20 = 110$; azúcar: $15 + 20 + 40 = 75$; huevo: $45 + 20 + 20 = 85$. Solución: 15 cajas de mazapán, 20 de yemas y 20 de almendrados.
d. Sí: la solución pasa a ser $x = \frac{175}{11}$, $y = \frac{170}{11}$, $z = \frac{240}{11}$. No son enteros, de modo que no se puede gastar todo exactamente; habría que redondear y sobraría algo de materia prima.

Solución del ejercicio 9

Planteamiento. En cada cruce, los vehículos que entran son los que salen, lo que da una ecuación lineal por cruce. El sistema resulta compatible indeterminado; lo resolvemos con un parámetro y exigimos que todos los flujos sean no negativos.

a. Las cuatro ecuaciones suman cero en ambos lados tras restar adecuadamente: $(x_1 - x_4) - (x_1 - x_2) + (x_3 - x_2) - (x_3 - x_4) = 0$ y $100 - 200 + 150 - 50 = 0$. Hay una ecuación redundante: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = 3$.
b. Compatible indeterminado con $4 - 3 = 1$ parámetro: $x_4 = t$, $x_1 = t + 100$, $x_2 = t - 100$, $x_3 = t + 50$.
c. Hace falta $x_2 = t - 100 \geq 0$, es decir $t \geq 100$; las demás condiciones se cumplen entonces automáticamente.
d. $x_2 = 0 \Rightarrow t = 100$: $x_1 = 200$, $x_3 = 150$, $x_4 = 100$ vehículos por hora.

Solución del ejercicio 10

Planteamiento. Ajustar una reacción química es igualar el número de átomos de cada elemento a ambos lados. Se obtiene un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones independientes, cuyas soluciones son proporcionales; elegimos la de menores enteros positivos.

a. C: $3x = z$. H: $8x = 2w$. O: $2y = 2z + w$.
b. Hay 4 incógnitas y 3 ecuaciones independientes; un sistema homogéneo con rango 3 es compatible indeterminado con 1 parámetro (las proporciones son lo que importa).
c. Con $x = 1$: $z = 3$, $w = 4$ y $2y = 6 + 4$, luego $y = 5$. Reacción ajustada: $\mathrm{C_3H_8} + 5\,\mathrm{O_2} \to 3\,\mathrm{CO_2} + 4\,\mathrm{H_2O}$.

Solución del ejercicio 11

Planteamiento. Las leyes de Kirchhoff dan un sistema lineal en las intensidades. Lo escribimos en forma matricial, comprobamos con el determinante que tiene solución

única, lo resolvemos por sustitución y usamos el resultado para calcular la potencia.

a.  .

b. $\det A = -44 \neq 0$, sistema compatible determinado.

c. De la tercera, $I_2 = 3I_3$; la primera da $I_1 = 4I_3$; la segunda: $16I_3 + 6I_3 = 12$, luego $I_3 = \frac{6}{11}$ A, $I_2 = \frac{18}{11}$ A, $I_1 = \frac{24}{11} \approx 2{,}18$ A.

d. $P = 4\left(\frac{24}{11}\right)^2 = \frac{2304}{121} \approx 19{,}04$ W.

Solución del ejercicio 12

Planteamiento. En el modelo de Leontief, la producción debe cubrir el consumo intermedio de los sectores más la demanda final: $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{d}$. Despejamos $\mathbf{x} = (I - T)^{-1}\mathbf{d}$ y calculamos la inversa de una matriz 2×2.

a. $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.

b. $(I - T)\mathbf{x} = \mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{x} = (I - T)^{-1}\mathbf{d}$, con $I - T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$ y $\det(I - T) = \frac{3}{5}$.

c. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 250 \\ \frac{1000}{3} \end{pmatrix}$, es decir, unos 250,0 millones en agricultura y 333,3 millones en industria.

d. Consumo intermedio agrícola: $0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 = 150{,}0$ millones, un 60,0 % de su producción.

Solución del ejercicio 13

Planteamiento. Cifrar consiste en multiplicar cada par de números por la matriz clave K. Para descifrar multiplicamos por K^{-1}, que tiene coeficientes enteros porque $\det K = 1$. Una matriz con determinante nulo no sirve, porque no se puede invertir.

a. HO $= (8, 16)$: $K\mathbf{v} = (32, 24)$. LA $= (12, 1)$: $K\mathbf{v} = (25, 13)$. Mensaje: 32, 24, 25, 13.

b. $\det K = 1$, luego $K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, entera porque se divide por $\det K = 1$.

c. $K^{-1}(25, 13) = (12, 1)$, que es LA; $K^{-1}(45, 25) = (45 - 25,\ -45 + 50) = (20, 5)$, que es SE. El mensaje es LASE.

d. Su determinante es $4 - 4 = 0$: no es invertible y dos pares distintos pueden dar el mismo cifrado, así que no se podría descifrar.

Solución del ejercicio 14

Planteamiento. La matriz de transición tiene en cada columna los porcentajes de

permanencia y de cambio. Multiplicándola por el vector de población obtenemos la del año siguiente, y la distribución estacionaria es la solución de $M\mathbf{p} = \mathbf{p}$ con población total fija.

a. $M = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (cada columna suma 1).

b. $\mathbf{p}_1 = M\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 620 \\ 380 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{p}_2 = M\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 634 \\ 366 \end{pmatrix}$ (miles).

c. $(M - I)\mathbf{p} = 0$ da $-0{,}1c + 0{,}2m = 0$, o sea $c = 2m$; con $c + m = 1000$: $c = \frac{2000}{3} \approx 666{,}7$ y $m \approx 333{,}3$ mil.

d. La ciudad pasa de 600 a unos 667 mil habitantes: crece hasta estabilizarse, porque el flujo hacia ella es proporcionalmente mayor.

Solución del ejercicio 15

Planteamiento. Cada sección del taller da una ecuación: las horas usadas deben igualar las disponibles. Resolvemos el sistema con la regla de Cramer, interpretamos la solución y estudiamos qué ocurre al cambiar un dato, analizando si la nueva solución es realizable.

a. 

b. $\Delta = 2$, $\Delta_x = 40$, $\Delta_y = 30$, $\Delta_z = 50$. Entonces $x = \Delta_x/\Delta = 20$, $y = \Delta_y/\Delta = 15$, $z = \Delta_z/\Delta = 25$.

c. Hay que fabricar 20 mesas, 15 sillas y 25 estanterías; así se usan exactamente todas las horas: $40 + 15 + 75 = 130$, $20 + 15 + 25 = 60$, $20 + 30 + 50 = 100$.

d. Solución: $x = 15$, $y = \frac{35}{2}$, $z = \frac{55}{2}$. Es matemáticamente válida, pero no realizable: no se pueden fabricar media silla ni media estantería. Habría que redondear y aceptar que algún equipo quede un poco ocioso.

Solución del ejercicio 16

Planteamiento. La parábola debe pasar por los tres puntos, lo que da un sistema lineal en sus coeficientes con matriz de Vandermonde. Lo resolvemos, usamos el polinomio para interpolar y discutimos por qué extrapolar lejos de los datos es poco fiable.

a. $c_0 = 8$, $c_0 + 6c_1 + 36c_2 = 20$, $c_0 + 12c_1 + 144c_2 = 14$; matriz .

b. Restando: $6c_1 + 36c_2 = 12$ y $12c_1 + 144c_2 = 6$. Del doble de la primera, $12c_1 + 72c_2 = 24$; restando, $72c_2 = -18$, $c_2 = -\frac{1}{4}$ y $c_1 = \frac{7}{2}$. Así $T(h) = 8 + \frac{7}{2}h - \frac{1}{4}h^2$.

c. A las 15:00, $h = 9$: $T(9) = \frac{77}{4}$ °C.

d. $T'(h) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}h = 0 \Rightarrow h = 7$, es decir a las 13:00; $T_{max} = \frac{81}{4}$ °C.
e. No: a las 3:00, $h = 21$, el modelo da $T(21) = -\frac{115}{4}$ °C, absurdo. Una parábola solo sirve para interpolar dentro del intervalo de los datos.

Solución del ejercicio 17

Planteamiento. Con dos nutrientes y tres piensos el sistema tiene más incógnitas que ecuaciones: es compatible indeterminado. Lo resolvemos en función de un parámetro, imponemos cantidades no negativas y minimizamos el coste, que resulta lineal en el parámetro.

a. $\begin{cases} 10x + 20y + 15z = 1000 \\ 5x + 5y + 10z = 450 \end{cases}$
b. Rango 2 con 3 incógnitas: compatible indeterminado con 1 parámetro. Dividiendo: $2x + 4y + 3z = 200$ y $x + y + 2z = 90$. Restando el doble de la segunda: $2y - z = 20$, $y = 10 + \frac{\lambda}{2}$, $x = 90 - y - 2\lambda = 80 - \frac{5\lambda}{2}$.
c. $y \geq 0$ siempre; $x \geq 0 \iff \lambda \leq 32$. Por tanto $0 \leq \lambda \leq 32$.
d. $C(\lambda) = 0{,}4(80 - 2{,}5\lambda) + 0{,}5(10 + 0{,}5\lambda) + 0{,}3\lambda = 37 - 0{,}45\lambda$. Decrece con λ: lo más barato es $\lambda = 32$: $x = 0$, $y = 26$, $z = 32$ kg, con coste $37 - 14{,}4 = 22{,}60$ €.

Solución del ejercicio 18

Planteamiento. El rango es 3 cuando el determinante no se anula. Hallamos los valores del parámetro que lo anulan y, para cada uno, buscamos un menor de orden 2 no nulo o una relación entre filas que confirme que el rango baja a 2.

a. Por Sarrus, $\det A_k = k^2 - 7k + 12 = (k - 3)(k - 4)$.
b. Si $k \neq 3, 4$: rango 3. Si $k = 3$: la fila 3 es $(3, 6, 3)$ y la fila 2 $(2, 3, 2)$; el menor [redacted], rango 2. Si $k = 4$: el menor de filas 1 y 3, columnas 2 y 3, [redacted], rango 2.
c. Con $k = 4$: $F_2 = (2, 4, 2) = 2F_1$. Las filas 1 y 2 son proporcionales.
d. No: hay dos valores ($k = 3$ y $k = 4$) en los que el rango baja a 2.

Solución del ejercicio 19

Planteamiento. Las condiciones de un cuadrado mágico son ecuaciones lineales homogéneas. El número de parámetros libres es el número de incógnitas menos el rango, y combinando ecuaciones obtenemos el valor de la casilla central y completamos un ejemplo.

a. Filas: $m_1 + m_2 + m_3 = S$, $m_4 + m_5 + m_6 = S$, $m_7 + m_8 + m_9 = S$; columnas: $m_1 + m_4 + m_7 = S$, $m_2 + m_5 + m_8 = S$, $m_3 + m_6 + m_9 = S$; diagonales: $m_1 + m_5 + m_9 = S$, $m_3 + m_5 + m_7 = S$.
b. Sistema homogéneo compatible indeterminado con $10 - 7 = 3$ parámetros: los

cuadrados mágicos forman un subespacio de dimensión 3.

c. Fila 2 + columna 2 + dos diagonales $= 4S$ y contiene la casilla central 4 veces y las demás una vez: $4S = 3m_5 + (\text{suma de todas}) = 3m_5 + 3S$, luego $m_5 = S/3$.

d. $m_5 = 5$; $m_3 = 15 - 2 - 7 = 6$; $m_9 = 15 - 2 - 5 = 8$; $m_7 = 15 - 6 - 5 = 4$; $m_4 = 15 - 2 - 4 = 9$; $m_8 = 15 - 7 - 5 = 3$; $m_6 = 15 - 9 - 5 = 1$. Cuadrado: $(2, 7, 6;\ 9, 5, 1;\ 4, 3, 8)$, todas las líneas suman 15.

Solución del ejercicio 20

Planteamiento. Para el determinante de Vandermonde restamos filas y sacamos factores comunes. Para las matrices idempotentes usamos las propiedades del determinante y desarrollamos $(I - A)^2$ con cuidado, porque el producto de matrices no es conmutativo.

a. Restando la fila 1 a las otras:



.

b. El sistema de interpolación tiene matriz de Vandermonde; si a, b, c son distintos, el determinante no es nulo y la solución es única.

c. $\det(A^2) = (\det A)^2 = \det A$, así que $\det A(\det A - 1) = 0$.

d. $(I - A)^2 = I - 2A + A^2 = I - 2A + A = I - A$. Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (proyección sobre el eje x); $I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.