Soluciones del examen - Lógica, conjuntos y demostraciones

Curso: Universidad 1 · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

Criterios. Se valora la tabla de verdad completa, el nombre de la regla y la negación correcta de la implicación.

a. La única fila en que q es F y $p \wedge (p \to q)$ podría ser V exigiría p V y $p \to q$ V con q F, lo que es imposible. Las cuatro filas valen V.
b. Modus ponens. Si p y $p \to q$ son verdaderas, se deduce q.
c. $p \wedge \neg q \wedge \neg r$. Se usa $\neg(p \to s) \equiv p \wedge \neg s$ y De Morgan: $\neg(q \vee r) \equiv \neg q \wedge \neg r$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

Criterios. Se valora decidir la verdad de cada frase y negar con cuidado los cuantificadores.

a. La primera es verdadera ($y = -x$); la segunda falsa: un único y no sirve para todos los x. Para la primera, dado x basta tomar $y = -x$. La segunda exigiría un y válido para todo x; con $x = 0$ y $x = 1$ se obtendría a la vez $y = 0$ e $y = -1$.
b. $\forall M > 0\ \exists x : \ |f(x)| > M$. Se cambia cada $\exists$ por $\forall$ y viceversa, y se niega la condición final: «f no está acotada».

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

Criterios. Se valora usar la inclusión-exclusión y el diagrama de Venn de forma coherente.

a. $45 + 38 - 20 = 63$. Por inclusión-exclusión, $|P \cup B| = |P| + |B| - |P \cap B|$: al sumar 45 y 38 se cuentan dos veces los 20 que juegan a ambos.
b. $80 - 63 = 17$. Es el complementario de la unión respecto del total de 80 estudiantes.
c. $45 - 20 = 25$. Del pádel se restan los que también juegan al baloncesto. Igualmente, solo baloncesto son $38 - 20 = 18$. Comprobación: $25 + 20 + 18 + 17 = 80$.

Solución del ejercicio 4 (6 puntos)

Criterios. Se valora la estructura completa de la inducción: caso base, hipótesis y paso inductivo.

a. Base: $2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$. Paso: $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$. Hipótesis de

inducción: la fórmula vale para n. Para $n+1$ se suma el término $(n+1)(n+2)$ y se saca factor común: $(n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$, que es la fórmula para $n+1$.

b. Base: 0. Paso: $(n+1)^3-(n+1) = (n^3-n)+3n(n+1)$, y $n(n+1)$ es par, luego $3n(n+1)$ es múltiplo de 6. Para $n=1$: $1-1=0$, múltiplo de 6. El desarrollo es $n^3+3n^2+3n+1-n-1 = (n^3-n)+3n^2+3n$. El primer sumando es múltiplo de 6 por hipótesis, y la suma de dos múltiplos de 6 también lo es.

Solución del ejercicio 5 (2 puntos)

Criterios. Se valora la estructura de la reducción al absurdo y la justificación de la divisibilidad.

a. Si $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ irreducible, $p^2 = 3q^2$, luego $3 \mid p$, $p = 3r$, $9r^2 = 3q^2$, $q^2 = 3r^2$ y $3 \mid q$: contradicción. Suponemos lo contrario: $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ con p, q enteros, $q \neq 0$, y la fracción irreducible. Elevando al cuadrado, $p^2 = 3q^2$, así que $3 \mid p^2$ y, por el enunciado, $3 \mid p$. Entonces 3 divide a p y a q, lo que contradice la irreducibilidad. Por tanto, $\sqrt{3}$ es irracional.