Apuntes - Lógica, conjuntos y demostraciones

Curso: Universidad 1

La matemática universitaria se escribe con un lenguaje preciso. En este tema fijamos tres herramientas que se usarán en todas las asignaturas de primero: la **lógica proposicional**, el lenguaje de **conjuntos** y los **métodos de demostración**, en particular la inducción. Dominarlas permite leer enunciados con exactitud y, sobre todo, escribir demostraciones que otra persona pueda comprobar línea a línea.

Actividad de introducción

Un anuncio de una academia de Madrid dice: «Si te matriculas en nuestro curso, aprobarás el examen». Laura aprobó sin matricularse. ¿Era falso el anuncio? Muchos dirían que sí, pero la lógica dice que no: el anuncio solo promete algo a quienes se matriculan. Distinguir lo que una frase afirma de lo que parece afirmar es la base del razonamiento matemático. En el primer curso de universidad las demostraciones pasan al primer plano, y para escribirlas con rigor necesitamos un lenguaje preciso: proposiciones, conectivos, cuantificadores y conjuntos. Este tema presenta ese lenguaje y los métodos de demostración que se usarán en todas las asignaturas.

Proposiciones y conectivos

Definición: proposiciones y conectivos

Una **proposición** es un enunciado que es verdadero (V) o falso (F), pero no ambas cosas. «7 es primo» es una proposición; «$x > 2$» no lo es hasta que se da valor a x. A partir de proposiciones p, q se construyen otras con los conectivos: negación $\neg p$, conjunción $p \wedge q$, disyunción inclusiva $p \vee q$, implicación $p \Rightarrow q$ y doble implicación $p \Leftrightarrow q$.

Definición: proposiciones y conectivos

La implicación $p \Rightarrow q$ solo es falsa cuando p es verdadera y q falsa; es equivalente a $\neg p \vee q$. Sus formas relacionadas son la **recíproca** $q \Rightarrow p$, la **contraria** $\neg p \Rightarrow \neg q$ y la **contrarrecíproca** $\neg q \Rightarrow \neg p$. Solo la contrarrecíproca es equivalente a la implicación original. Es el error más repetido en los exámenes: creer que, si vale una implicación, también vale su recíproca.

Definición: proposiciones y conectivos

Una **tautología** es una proposición siempre verdadera y una **contradicción** es siempre falsa. Las leyes de De Morgan dicen que $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ y $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$. Dos proposiciones son **equivalentes** si tienen la misma tabla de

verdad.

Cuantificadores

Definición: cuantificadores

Un **predicado** $P(x)$ depende de una variable. Escribimos $\forall x\, P(x)$ («para todo x») y $\exists x\, P(x)$ («existe algún x»). La negación intercambia los cuantificadores: $\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x)$ y $\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\, \neg P(x)$. El orden importa: «$\forall x\, \exists y :\ y > x$» es verdadera en $\mathbb{R}$, pero «$\exists y\, \forall x :\ y > x$» es falsa, porque ningún real es mayor que todos los reales.

Conjuntos

Definición: conjuntos

Un conjunto se define por extensión ($A = \{1, 2, 3\}$) o por comprensión ($A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 3\}$). Las operaciones básicas son la unión $A \cup B$, la intersección $A \cap B$, la diferencia $A \setminus B$, el complementario A^c y la diferencia simétrica $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Se tiene $A \subseteq B$ si todo elemento de A está en B; para probar $A = B$ se demuestran las dos inclusiones.

Propiedad

Si A tiene n elementos, su conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n. El principio de inclusión-exclusión da $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. El producto cartesiano $A \times B$ tiene $|A| \cdot |B|$ elementos.

Métodos de demostración

Regla: Directa

Directa: se supone la hipótesis y se llega a la tesis. **Contrarrecíproco:** para probar $p \Rightarrow q$ se prueba $\neg q \Rightarrow \neg p$. **Reducción al absurdo:** se supone la negación de la tesis y se llega a una contradicción. **Contraejemplo:** basta un solo caso para refutar un «para todo».

Regla: Inducción

Inducción. Para probar $P(n)$ para todo $n \geq n_0$: (1) *caso base*, se comprueba $P(n_0)$; (2) *paso inductivo*, se supone cierta $P(k)$ (hipótesis de inducción) y se deduce $P(k+1)$. Entonces $P(n)$ vale para todo $n \geq n_0$.

Método: demostrar por inducción

1. Enuncia la propiedad P(n) y el valor inicial n0.
2. Caso base: comprueba P(n0).
3. Hipótesis de inducción: supón P(k) cierta.
4. Paso inductivo: deduce P(k+1) usando P(k).
5. Concluye: P(n) es cierta para todo n mayor o igual que n0.

Ejemplo 1

Probar que $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Base: para $n=1$ ambos miembros valen 1. Paso: si $\sum_{i=1}^{k} i=\frac{k(k+1)}{2}$, entonces $\sum_{i=1}^{k+1} i=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, que es la fórmula para $k+1$.

Ejemplo 2

Probar que si n^2 es par, entonces n es par.

Contrarrecíproco: si n es impar, $n=2k+1$ y $n^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$ es impar.

Ejemplo 3

Demostrar que $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

Si $x\in A\setminus(B\cup C)$, entonces $x\in A$, $x\notin B$ y $x\notin C$, luego $x\in A\setminus B$ y $x\in A\setminus C$. Cada paso es reversible, así que los conjuntos son iguales.

¡Atención!

Confundir la implicación con su recíproca; negar «para todo» con «para ningún» en lugar de «existe uno que no»; comprobar una fórmula en unos pocos casos y creer que eso es una demostración; olvidar el caso base de la inducción; usar en el paso inductivo la propiedad para $k+1$ como si ya fuera cierta.

Lógica y razonamiento

Definición: razonamiento válido

Un razonamiento está formado por unas premisas y una conclusión. Es válido cuando es imposible que todas las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa; es decir, cuando la implicación «premisas ⇒ conclusión» es una tautología. La validez depende solo de la forma, no del contenido: un razonamiento válido con una premisa falsa puede llevar a una conclusión falsa, y un razonamiento no válido puede llegar por

casualidad a una conclusión verdadera.

Propiedad: reglas de inferencia básicas

Modus ponens: de p y $p \to q$ se deduce q. Modus tollens: de $p \to q$ y $\neg q$ se deduce $\neg p$. Silogismo hipotético: de $p \to q$ y $q \to r$ se deduce $p \to r$. Silogismo disyuntivo: de $p \vee q$ y $\neg p$ se deduce q. Son falacias frecuentes afirmar el consecuente (de $p \to q$ y q deducir p) y negar el antecedente (de $p \to q$ y $\neg p$ deducir $\neg q$).

Método: elegir el tipo de demostración

1. Demostración directa: se parte de la hipótesis y se encadenan implicaciones hasta la tesis.
2. Contrarrecíproco: si la tesis negada da más información, se demuestra $\neg q \Rightarrow \neg p$.
3. Reducción al absurdo: se supone la tesis falsa y se llega a una contradicción; es útil para afirmaciones de imposibilidad o de irracionalidad.
4. Inducción: para propiedades que dependen de un número natural n.
5. Contraejemplo: para refutar una afirmación universal basta un caso en que falle.

Ejemplo 4

Demuestra que si n es un entero impar, $n^2 - 1$ es múltiplo de 8.

Directa: $n = 2k + 1$ y $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$. Como $k(k + 1)$ es producto de dos consecutivos, es par, así que $n^2 - 1$ es múltiplo de $4 \cdot 2 = 8$.

Ejemplo 5

¿Es cierto que $n^2 + n + 41$ es primo para todo natural n?

Es primo para $n = 0, 1, \ldots, 39$, lo que podría hacer creer que siempre lo es. Pero con $n = 40$ se obtiene $40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$. Basta un contraejemplo para refutar la afirmación, y muchos casos favorables no demuestran nada.

Ejemplo 6

En una encuesta de una facultad de Sevilla, 60 estudiantes usan bicicleta, 45 transporte público y 20 ambos. ¿Cuántos usan al menos uno?

Por inclusión-exclusión: $|B \cup T| = 60 + 45 - 20 = 85$ estudiantes. Restamos los 20 porque se habían contado dos veces.

Teorema: principio de inducción fuerte

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales. Si $P(1)$ es cierta y, para cada n, la validez de $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ implica la de $P(n+1)$, entonces $P(n)$ es cierta para

todo $n \geq 1$. Esta versión es útil cuando el paso de n a $n+1$ necesita varios casos anteriores, como en las sucesiones definidas a partir de los dos términos previos o en la demostración de que todo número natural mayor que 1 se descompone en producto de primos: si $n+1$ no es primo, se escribe como producto de dos factores menores, a los que ya se aplica la hipótesis.

Conjuntos, aplicaciones y cardinal

La teoría de conjuntos proporciona el vocabulario de todas las matemáticas. Un conjunto queda determinado por sus elementos, y dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos; por eso las igualdades se demuestran por doble inclusión. Las operaciones de unión, intersección, diferencia y complementario cumplen leyes análogas a las de la lógica: la unión corresponde a la disyunción, la intersección a la conjunción y el complementario a la negación, de modo que las leyes de De Morgan valen en los dos lenguajes. Una aplicación $f : A \to B$ asigna a cada elemento de A exactamente un elemento de B; es inyectiva si elementos distintos tienen imágenes distintas, sobreyectiva si todo elemento de B es imagen de alguno y biyectiva si es ambas cosas. Dos conjuntos finitos tienen el mismo cardinal precisamente cuando existe una biyección entre ellos, y esta idea, aplicada a conjuntos infinitos, llevó a Cantor a descubrir que hay infinitos de distintos tamaños: los naturales y los racionales son numerables, pero los reales no lo son. El principio del palomar y la fórmula de inclusión-exclusión son las dos herramientas básicas para contar elementos en problemas concretos.

¡Atención!

En matemáticas, la disyunción «o» es inclusiva: $p \vee q$ es verdadera también cuando lo son ambas. Una implicación con antecedente falso es verdadera. Y la negación de «todos cumplen P» no es «ninguno cumple P», sino «alguno no cumple P». Tampoco hay que confundir $\in$ con $\subseteq$: $1 \in \{1, 2\}$ pero $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$.

¿Sabías que?

George Boole publicó en 1854 un álgebra de la lógica que parecía una curiosidad teórica. Casi un siglo después, Claude Shannon mostró que los circuitos eléctricos con interruptores obedecen exactamente esa álgebra, y hoy cada procesador de un teléfono móvil contiene miles de millones de puertas lógicas que calculan conjunciones, disyunciones y negaciones.

El consejo de Otto

antes de demostrar, prueba con números pequeños. Si encuentras un contraejemplo, ahorras mucho tiempo; si no, el patrón te sugiere cómo hacer el paso inductivo.