Ejercicios - Lógica, conjuntos y demostraciones

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Tablas de verdad

Construye las tablas de verdad pedidas.

a. Completa la tabla de $p \to q$ y de $\neg q \to \neg p$. ¿Qué observas?
b. Demuestra que $(p \wedge q) \to p$ es una tautología.
c. ¿Es $p \to (p \wedge q)$ una tautología? Justifica.
d. Clasifica $p \wedge \neg p$ y $p \vee \neg p$.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Equivalencias lógicas

Usa tablas de verdad o leyes lógicas conocidas.

a. Comprueba la ley de De Morgan $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.
b. Simplifica $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.
c. Escribe la negación de $p \to q$ sin usar el símbolo $\to$.
d. Niega la frase: «si estudio, apruebo».

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Cuantificadores y su negación

Recuerda que $\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x)$ y $\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\, \neg P(x)$.

a. Decide si es verdadera: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} :\ y > x^2$. Escribe su negación.
b. Decide si es verdadera: $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} :\ y > x^2$.
c. Niega la definición de límite: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N :\ |a_n - L|$.
d. Niega: «todos los estudiantes de la clase tienen algún amigo en Madrid».

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Operaciones con conjuntos

Sea $U = \{1, 2, \ldots, 12\}$, $A = \{x \in U :\ x \text{ par},\ x \leq 10\}$ y $B = \{x \in U :\ 3 \mid x\}$.

a. Escribe A y B por extensión.
b. Calcula $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $A \triangle B$.

c. Calcula y comprueba que coincide con .
d. Calcula $|A \cup B|$ con la fórmula $|A| + |B| - |A \cap B|$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Demostrar igualdades de conjuntos

Para demostrar $X = Y$ se prueba la doble inclusión $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

a. Demuestra $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
b. Demuestra $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
c. ¿Es cierto que $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$? Busca un contraejemplo con $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{3, 4\}$.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Producto cartesiano y conjunto de partes

Sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$.

a. Escribe $A \times B$ y calcula su cardinal.
b. Escribe $\mathcal{P}(A)$.
c. ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(A \times B)$?
d. ¿Es $A \times B = B \times A$? Justifica.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Encuesta en una facultad

En una encuesta a 120 estudiantes de primer curso de la Universidad de Murcia, 70 dicen que les cuesta Cálculo, 55 que les cuesta Álgebra y 30 que les cuestan ambas asignaturas.

a. Representa la situación con un diagrama de Venn.
b. ¿Cuántos tienen dificultades con al menos una de las dos?
c. ¿Cuántos no tienen dificultades con ninguna?
d. ¿Cuántos tienen dificultades con exactamente una?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Idiomas en una escuela oficial

En una Escuela Oficial de Idiomas de Valencia hay 200 alumnos. Estudian inglés 120, alemán 70 y chino 40; inglés y alemán 30, inglés y chino 20, alemán y chino 15, y los tres idiomas 10.

a. Escribe la fórmula de inclusión-exclusión para tres conjuntos.
b. ¿Cuántos estudian al menos uno de los tres idiomas? ¿Cuántos ninguno (estudian

otro idioma)?
c. ¿Cuántos estudian solo inglés?
d. ¿Cuántos estudian exactamente dos idiomas?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La alarma de una vivienda

La alarma de una vivienda de Bilbao suena si (la puerta está abierta y el sistema está activado) o hay humo. Sean p: «puerta abierta», a: «sistema activado», h: «hay humo».

a. Escribe la proposición S «suena la alarma».
b. ¿En cuántas de las 8 combinaciones posibles suena? Haz la tabla.
c. Escribe la negación de S simplificada.
d. Si la alarma no suena y el sistema está activado, ¿qué se puede deducir?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Búsquedas en el catálogo de una biblioteca

El catálogo de una biblioteca universitaria de Salamanca permite búsquedas booleanas. Sea M el conjunto de libros de matemáticas (800), F los de física (500) e I los que están en inglés (600). Se sabe que $|M \cap F| = 150$, $|M \cap I| = 250$, $|F \cap I| = 200$ y $|M \cap F \cap I| = 80$.

a. Traduce a conjuntos la búsqueda «matemáticas Y inglés NO física».
b. Calcula cuántos libros devuelve.
c. ¿Cuántos devuelve «matemáticas O física»?
d. ¿Cuántos libros de física no están ni en inglés ni son de matemáticas?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – La isla de los veraces y los mentirosos

En una isla del archipiélago canario de un cuento, los veraces siempre dicen la verdad y los mentirosos siempre mienten. Te encuentras con Ana y Blas. Ana dice: «Blas es mentiroso». Blas dice: «Ana y yo somos del mismo tipo».

a. Sea a: «Ana es veraz» y b: «Blas es veraz». Explica por qué se cumple $a \leftrightarrow \neg b$.
b. Escribe la condición que impone la frase de Blas.
c. Resuelve con una tabla de verdad.
d. Si Blas hubiera dicho «Ana es veraz», ¿tendría solución única el acertijo?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Las normas de un torneo

El reglamento de un torneo escolar de fútbol sala de Toledo dice: «Si llueve, el partido se juega en el pabellón».

a. Escribe la recíproca, la contraria y la contrarrecíproca.
b. ¿Cuál de ellas es equivalente a la norma?
c. Hoy el partido se juega en el pabellón. ¿Se puede deducir que llueve?
d. Hoy el partido se juega al aire libre. ¿Qué se deduce?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El menú del día

Un restaurante de Burgos ofrece un menú del día con 3 primeros $P = \{p_1, p_2, p_3\}$, 4 segundos S y 2 postres D.

a. ¿Qué conjunto describe todos los menús posibles? ¿Cuántos hay?
b. Un cliente vegetariano solo puede tomar 2 primeros y 1 segundo. ¿Cuántos menús tiene?
c. Si el postre puede sustituirse por café, ¿cuántos menús hay en total?
d. ¿Cuántos subconjuntos de platos (de los 9) podría pedir un cliente a la carta, incluido no pedir nada?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Inducción: fórmulas de sumas

El principio de inducción: si $P(1)$ es cierta y $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 1$.

a. Comprueba $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para $n = 1, 2, 3, 4$.
b. Demuéstralo por inducción.
c. Demuestra que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
d. Deduce el valor de $1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3$.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: tres demostraciones clásicas

En un seminario de primer curso se pide demostrar tres resultados con métodos distintos: contrarrecíproco, reducción al absurdo y construcción.

a. Demuestra por contrarrecíproco: «si n^2 es par, entonces n es par».
b. Demuestra por reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ es irracional.
c. Demuestra que hay infinitos números primos (argumento de Euclides).
d. ¿Por qué en a) no conviene hacer una demostración directa?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: inducción con divisibilidad y desigualdades

La inducción también sirve para demostrar divisibilidades y desigualdades. Atención: a veces la propiedad empieza a ser cierta en un $n_0 > 1$.

a. Demuestra que $7^n - 1$ es divisible por 6 para todo $n \geq 1$.
b. Comprueba para qué valores de $n \leq 6$ se cumple $2^n > n^2$.
c. Demuestra por inducción que $2^n > n^2$ para todo $n \geq 5$ (usa que $2n + 1$ si $n \geq 3$).
d. Demuestra la desigualdad de Bernoulli: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para $x > -1$.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: el principio del palomar

Si se reparten $n + 1$ objetos en n cajas, alguna caja tiene al menos dos. En una clase de 30 estudiantes de Valencia se plantean varias preguntas.

a. ¿Cuántas personas hacen falta para asegurar que dos cumplen años el mismo día (incluido el 29 de febrero)?
b. Demuestra que en la clase hay al menos 3 estudiantes nacidos el mismo mes.
c. Se eligen 5 puntos en un cuadrado de lado 2. Demuestra que dos de ellos están a distancia $\leq \sqrt{2}$.
d. ¿Garantiza el principio que dos de los 30 estudiantes cumplen años el mismo día? Explica la diferencia con la «paradoja del cumpleaños».

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: divisores entre 1 y 1000

Un programador de una empresa de Málaga necesita saber cuántos números del 1 al 1000 son divisibles por 2, por 3 o por 5, para comprobar un algoritmo. Sean D_k los múltiplos de k en $\{1, \ldots, 1000\}$.

a. Calcula $|D_2|$, $|D_3|$, $|D_5|$ usando la parte entera.
b. Calcula $|D_2 \cap D_3|$, $|D_2 \cap D_5|$, $|D_3 \cap D_5|$ y $|D_2 \cap D_3 \cap D_5|$.
c. Aplica inclusión-exclusión para hallar $|D_2 \cup D_3 \cup D_5|$.
d. ¿Cuántos números no son divisibles por ninguno? Compara con $1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ y explica la coincidencia aproximada.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: ¿es válido el razonamiento?

Una inspectora de policía de Madrid analiza tres razonamientos. Un razonamiento es válido si la conjunción de las premisas implica la conclusión (es una tautología).

a. «Si el sospechoso estuvo en la escena, tiene barro en los zapatos. Tiene barro en

los zapatos. Luego estuvo en la escena.» ¿Es válido?
b. «Si estuvo en la escena, tiene barro. No tiene barro. Luego no estuvo.» ¿Es válido?
c. «O fue el jardinero o fue el mayordomo. No fue el jardinero. Luego fue el mayordomo.» ¿Es válido?
d. Comprueba b) con una tabla de verdad de $[(p \to q) \land \neg q] \to \neg p$.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: el teorema de Cantor

Georg Cantor demostró que ningún conjunto puede ponerse en biyección con su conjunto de partes.

a. Demuestra por inducción que si $|A| = n$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
b. Sea $f : A \to \mathcal{P}(A)$ cualquier aplicación y $D = \{x \in A : \ x \notin f(x)\}$. Demuestra que D no es imagen de ningún elemento.
c. Deduce que no existe ninguna aplicación sobreyectiva de A en $\mathcal{P}(A)$.
d. Comprueba la construcción con $A = \{1, 2, 3\}$ y $f(1) = \{1, 2\}$, $f(2) = \varnothing$, $f(3) = \{1, 3\}$.