Soluciones - Lógica, conjuntos y demostraciones

Curso: Universidad 1

Solución del ejercicio 1

Planteamiento. Construimos las tablas de verdad con todas las combinaciones posibles de valores de las variables. Recordamos que una implicación solo es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, y que una tautología es verdadera en todas las filas.

a. Las dos últimas columnas coinciden: una implicación y su contrarrecíproca son equivalentes.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

b. La implicación solo es falsa si el antecedente es V y el consecuente F. Si $p \wedge q$ es V, entonces p es V; por tanto nunca ocurre V$\to$F.

c. No: con p V y q F, el antecedente es V y $p \wedge q$ es F, luego la implicación es falsa.

d. $p \wedge \neg p$ es siempre falsa (contradicción) y $p \vee \neg p$ siempre verdadera (tautología, principio del tercero excluido).

Solución del ejercicio 2

Planteamiento. Dos proposiciones son equivalentes si tienen la misma tabla de verdad. Usamos las leyes de De Morgan, la distributiva y la equivalencia $p \to q \equiv \neg p \vee q$ para simplificar y para negar correctamente.

a. Solo cuando p y q son V es $p \wedge q$ verdadera; justo en ese caso $\neg p \vee \neg q$ es falsa. En los otros tres casos ambas son V.

b. Distributiva: $p \wedge (q \vee \neg q) \equiv p \wedge V \equiv p$.

c. $p \to q \equiv \neg p \vee q$, luego $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$.

d. «Estudio y no apruebo». La negación de una implicación no es otra implicación.

Solución del ejercicio 3

Planteamiento. Para negar una frase con cuantificadores, cada $\forall$ pasa a $\exists$, cada $\exists$ pasa a $\forall$ y se niega la propiedad final. Para decidir si es verdadera, buscamos un ejemplo o un contraejemplo según el orden de los cuantificadores.

a. Verdadera: basta $y = x^2 + 1$. Negación: $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} :\ y \leq x^2$.

b. Falsa: para cualquier y, el número $x = \sqrt{|y|} + 1$ cumple $x^2 > y$. El orden de los cuantificadores cambia el significado.
c. $\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N :\ |a_n - L| \geq \varepsilon$: a_n no tiende a L.
d. «Hay algún estudiante de la clase que no tiene ningún amigo en Madrid».

Solución del ejercicio 4

Planteamiento. Escribimos los conjuntos por extensión y aplicamos las definiciones de unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complementario. Comprobamos las leyes de De Morgan y la fórmula del cardinal de la unión.

a. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{3, 6, 9, 12\}$.
b. $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$, $A \cap B = \{6\}$, $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10\}$, $A \triangle B = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 12\}$.
c. ; , y su intersección es $\{1, 5, 7, 11\}$: coinciden (De Morgan).
d. $5 + 4 - 1 = 8 = |A \cup B|$.

Solución del ejercicio 5

Planteamiento. Para demostrar una igualdad de conjuntos traducimos la pertenencia a lógica y usamos equivalencias, lo que prueba la doble inclusión. Para refutar una igualdad basta un contraejemplo concreto en el que los dos miembros sean distintos.

a. $x \in A \setminus (B \cup C) \iff x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$, que es la pertenencia al segundo miembro. Todas las equivalencias valen en los dos sentidos.
b. $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$, por la propiedad distributiva de la lógica.
c. No. $B \setminus C = \{2\}$ y $A \setminus \{2\} = \{1, 3\}$; en cambio $A \setminus B = \{1, 3\}$ y $\{1, 3\} \setminus C = \{1\}$. Los resultados difieren.

Solución del ejercicio 6

Planteamiento. El producto cartesiano está formado por pares ordenados, así que su cardinal es el producto de los cardinales. El conjunto de partes contiene todos los subconjuntos, incluidos el vacío y el total, y tiene 2^n elementos.

a. $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$, con $2 \cdot 3 = 6$ elementos.
b. $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
c. $2^6 = 64$.
d. No: $(a, 1) \in A \times B$ pero $(a, 1) \notin B \times A$, cuyos pares empiezan por un número. Los pares son ordenados.

Solución del ejercicio 7

Planteamiento. Representamos los datos en un diagrama de Venn empezando por la intersección y aplicamos la fórmula de inclusión-exclusión, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, que evita contar dos veces a quienes están en ambos conjuntos.

a. Solo Cálculo: $70 - 30 = 40$; ambas: 30; solo Álgebra: $55 - 30 = 25$; fuera de los dos círculos, el resto.
b. $|C \cup A| = 70 + 55 - 30 = 95$.
c. $120 - 95 = 25$.
d. $40 + 25 = 65$.

Solución del ejercicio 8

Planteamiento. Con tres conjuntos, la inclusión-exclusión suma los cardinales simples, resta las intersecciones dos a dos y vuelve a sumar la triple. Rellenando el diagrama de Venn desde el centro obtenemos las regiones de «solo» y «exactamente dos».

a. $|I \cup A \cup C| = |I| + |A| + |C| - |I \cap A| - |I \cap C| - |A \cap C| + |I \cap A \cap C|$.
b. $120 + 70 + 40 - 30 - 20 - 15 + 10 = 175$; ninguno: $200 - 175 = 25$.
c. $120 - 30 - 20 + 10 = 80$.
d. $(30 - 10) + (20 - 10) + (15 - 10) = 35$.

Solución del ejercicio 9

Planteamiento. Traducimos el funcionamiento de la alarma a una proposición con conectivos. Contamos en la tabla las combinaciones que la hacen verdadera y aplicamos De Morgan para negarla y deducir información a partir de lo que observamos.

a. $S \equiv (p \wedge a) \vee h$.
b. Suena cuando h es V (4 casos) y cuando p, a son V con h F (1 caso): 5 combinaciones.
c. $\neg S \equiv \neg(p \wedge a) \wedge \neg h \equiv (\neg p \vee \neg a) \wedge \neg h$.
d. De $\neg S$: no hay humo y $\neg p \vee \neg a$; como a es V, debe ser $\neg p$: la puerta está cerrada.

Solución del ejercicio 10

Planteamiento. Cada búsqueda booleana corresponde a una operación de conjuntos: Y es la intersección, O la unión y NO la diferencia. Calculamos los cardinales con la inclusión-exclusión usando los datos del catálogo.

a. $(M \cap I) \setminus F$.
b. $|M \cap I| - |M \cap F \cap I| = 250 - 80 = 170$.
c. $800 + 500 - 150 = 1150$.

d. $|F| - |F \cap M| - |F \cap I| + |F \cap M \cap I| = 500 - 150 - 200 + 80 = 230$.

Solución del ejercicio 11

Planteamiento. Lo que dice cada persona es verdadero exactamente cuando esa persona es veraz, lo que da bicondicionales. Probamos las cuatro combinaciones posibles en una tabla y nos quedamos con la única coherente con las dos afirmaciones.

a. Lo que dice una persona es verdad si y solo si esa persona es veraz.
b. $b \leftrightarrow (a \leftrightarrow b)$.
c. De las 4 combinaciones, solo a V, b F cumple ambas: Ana es veraz y Blas mentiroso. Comprobación: Ana dice la verdad (Blas miente) y Blas miente al decir que son iguales.
d. Entonces $b \leftrightarrow a$ y $a \leftrightarrow \neg b$ son incompatibles (darían $b \leftrightarrow \neg b$): no habría solución, la situación sería imposible.

Solución del ejercicio 12

Planteamiento. Escribimos la recíproca, la contraria y la contrarrecíproca de la norma y recordamos que solo la contrarrecíproca es equivalente. Después aplicamos el modus tollens y detectamos la falacia de afirmar el consecuente.

a. Recíproca: «si se juega en el pabellón, llueve». Contraria: «si no llueve, no se juega en el pabellón». Contrarrecíproca: «si no se juega en el pabellón, no llueve».
b. Solo la contrarrecíproca. La recíproca y la contraria son equivalentes entre sí, pero no a la norma.
c. No: puede jugarse en el pabellón por otro motivo (falacia de afirmar el consecuente).
d. Que no llueve (modus tollens).

Solución del ejercicio 13

Planteamiento. Un menú es una terna ordenada (primero, segundo, postre), así que el conjunto de menús es un producto cartesiano y su cardinal se obtiene multiplicando. Pedir a la carta es elegir un subconjunto de platos: hay 2^n posibilidades.

a. $P \times S \times D$, con $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ menús.
b. $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$.
c. $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$.
d. $|\mathcal{P}(\text{platos})| = 2^9 = 512$.

Solución del ejercicio 14

Planteamiento. En una demostración por inducción comprobamos el caso base y, suponiendo cierta la fórmula para n, sumamos el término siguiente y operamos hasta

obtener la fórmula para $n+1$. Así queda probada para todos los naturales.

a. $1=1$, $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$.
b. Base: $1=1^2$. Paso: si $1+\cdots+(2n-1)=n^2$, sumando $2n+1$ se obtiene $n^2+2n+1=(n+1)^2$.
c. Base: $1=1$. Paso: $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4n+4\right)=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.
d. $\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2=55^2=3025$.

Solución del ejercicio 15

Planteamiento. Elegimos el método de demostración adecuado: el contrarrecíproco cuando la negación de la tesis da más información, la reducción al absurdo para la irracionalidad y la construcción de un número nuevo en el argumento de Euclides.

a. Contrarrecíproco: si n es impar, $n=2k+1$ y $n^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$ es impar.
b. Supongamos $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ irreducible. Entonces $p^2=2q^2$, así que p^2 es par y, por a), $p=2r$. Luego $4r^2=2q^2$, $q^2=2r^2$ y q también es par: contradice que la fracción sea irreducible.
c. Si solo hubiera los primos $p_1,\ldots,p_k$, el número $M=p_1\cdots p_k+1$ deja resto 1 al dividirlo por cada p_i, así que tiene un factor primo distinto de todos ellos: contradicción.
d. Partir de $n^2=2m$ y llegar a que n es par exige extraer raíces y estudiar divisibilidad; el contrarrecíproco solo requiere elevar al cuadrado.

Solución del ejercicio 16

Planteamiento. La inducción también sirve para divisibilidades y desigualdades. En el paso inductivo relacionamos la expresión para $n+1$ con la de n; en las desigualdades usamos una acotación auxiliar y empezamos en el primer valor en que se cumplen.

a. Base: $7-1=6$. Paso: $7^{n+1}-1=7(7^n-1)+6$, suma de dos múltiplos de 6.
b. $n=1$: $2>1$ sí; $n=2$: $4=4$ no; $n=3$: 8 no; $n=4$: $16=16$ no; $n=5$: $32>25$ sí; $n=6$: $64>36$ sí.
c. Base $n=5$. Si $2^n>n^2$, entonces $2^{n+1}>2n^2=n^2+n^2>n^2+2n+1=(n+1)^2$.
d. Base $n=1$: igualdad. Si $(1+x)^n\geq 1+nx$, multiplicando por $1+x>0$: $(1+x)^{n+1}\geq(1+nx)(1+x)=1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x$.

Solución del ejercicio 17

Planteamiento. El principio del palomar asegura que si hay más objetos que cajas, alguna caja recibe al menos dos. Identificamos en cada caso qué son los objetos y qué son las cajas, y lo distinguimos de los argumentos probabilísticos.

a. 367 personas (366 días posibles).
b. Si cada mes tuviera como mucho 2, habría como mucho 24 estudiantes; como son 30, algún mes tiene al menos $\lceil 30/12 \rceil = 3$.
c. Divide el cuadrado en 4 cuadrados de lado 1. Dos puntos caen en el mismo, y su distancia es como mucho la diagonal, $\sqrt{2}$.
d. No lo garantiza (30 < 366). Pero la probabilidad de que ocurra es alta: $1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots 336}{365^{30}} \approx 0{,}706$.

Solución del ejercicio 18

Planteamiento. Contamos los múltiplos de cada número con la parte entera de una división. Las intersecciones son los múltiplos del mínimo común múltiplo, y la inclusión-exclusión para tres conjuntos da el número de elementos de la unión.

a. $\lfloor 1000/2 \rfloor = 500$, $\lfloor 1000/3 \rfloor = 333$, $\lfloor 1000/5 \rfloor = 200$.
b. Múltiplos de 6: 166; de 10: 100; de 15: 66; de 30: 33.
c. $500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$.
d. $1000 - 734 = 266$; la estimación da $266{,}7$. La proporción de números no divisibles por 2, 3 ni 5 es $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$, salvo errores de redondeo.

Solución del ejercicio 19

Planteamiento. Un razonamiento es válido si la conjunción de las premisas implica la conclusión en todas las filas de la tabla de verdad. Identificamos cada razonamiento con una regla conocida o con una falacia y buscamos un contraejemplo cuando no es válido.

a. No: es la falacia de afirmar el consecuente. Con p F y q V las premisas son ciertas y la conclusión falsa.
b. Sí: es el modus tollens.
c. Sí: es el silogismo disyuntivo, $[(j \vee m) \wedge \neg j] \to m$.
d. Las cuatro filas dan V: si q es F y $p \to q$ es V, necesariamente p es F.

Solución del ejercicio 20

Planteamiento. Demostramos el cardinal del conjunto de partes por inducción y el teorema de Cantor por reducción al absurdo: el conjunto diagonal de los elementos que no pertenecen a su imagen no puede ser imagen de ningún elemento.

a. Base $n = 0$: $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Paso: los subconjuntos de $A \cup \{b\}$ son los de A y esos mismos con b añadido: $2 \cdot 2^n$.
b. Si $D = f(d)$, entonces $d \in D \iff d \notin f(d) = D$: contradicción en los dos casos.
c. El conjunto D no está en la imagen de f, luego ninguna f es sobreyectiva.
d. $1 \in f(1)$, $2 \notin f(2)$, $3 \in f(3)$, así que $D = \{2\}$, que en efecto no es ni $\{1, 2\}$, ni $\varnothing$, ni $\{1, 3\}$.