Soluciones del examen - Límites y continuidad

Curso: Universidad 1 · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (5 puntos)

Criterios. Se valora identificar la indeterminación en cada apartado y elegir la técnica adecuada (factorizar, conjugado, límites notables).

a. Factorizamos: $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2} \to -\frac{1}{4}$. Al sustituir sale $\frac{0}{0}$, así que $x=2$ es raíz del numerador y del denominador. Tras simplificar, $\frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}$.

b. Racionalizamos: $\frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)\sin 2x} = \frac{x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Es $\frac{0}{0}$. Multiplicamos por el conjugado $\sqrt{x+1}+1$ y el numerador queda x. Además $\frac{x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \to \frac{1}{2}$.

c. $f - 1 = \frac{2}{2x-1}$, $g(f-1) = \frac{2x}{2x-1} \to 1$. Límite: e. Es una indeterminación 1^{∞}: se usa $\lim f^g = e^{\lim g(f-1)}$ con $f = \frac{2x+1}{2x-1} \to 1$ y $g = x$. El exponente tiende a 1, así que el límite es $e^1 = e$.

Solución del ejercicio 2 (3 puntos)

Criterios. Se valora calcular bien los límites laterales y plantear correctamente la condición de continuidad para hallar el parámetro.

a. Por la izquierda $\frac{\sin ax}{x} \to a$. Por la derecha $\frac{e^{bx}-1}{x} + 1 \to b + 1$. Por la izquierda se usa el límite notable $\frac{\sin u}{u} \to 1$ con $u = ax$. Por la derecha, $\frac{e^u - 1}{u} \to 1$ con $u = bx$, de modo que $\frac{e^{bx}-1}{x} \to b$.

b. Continuidad: $a = 2$ y $b + 1 = 2$, es decir $b = 1$. Ambos límites laterales deben valer $f(0) = 2$. Con $a = 2$ y $b = 1$ la función es continua en 0.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

Criterios. Se valora el dominio, la clasificación razonada de las discontinuidades y el cálculo de las asíntotas con límites.

a. Dominio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Como $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, $f = \frac{x-2}{x-1}$ salvo en -1. En $x = -1$: límite $\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$, discontinuidad evitable. En $x = 1$: laterales infinitos, esencial. La de $x = 1$ es de salto infinito.

b. Asíntota vertical $x = 1$ (no en $x = -1$, que es evitable). Horizontal $y = 1$. En efecto, $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x-1} = 1$.

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

Criterios. Se valora comprobar las hipótesis de Bolzano (continuidad y cambio de signo) y aplicar con orden los pasos de bisección.

a. $g(x) = \cos x - x$ es continua, $g(0) = 1 > 0$ y $g(1) = \cos 1 - 1 \approx -0{,}46 < 0$. Bolzano da la raíz. Es continua como diferencia de funciones continuas y toma signos opuestos en los extremos; además $g'(x) = -\sin x - 1 < 0$ en $[0, 1]$, luego la raíz es única.
b. $g(0{,}5) = \cos 0{,}5 - 0{,}5 \approx 0{,}378 > 0$, luego la raíz está en $(0{,}5;\ 1)$. La bisección evalúa g en el punto medio y se queda con la mitad donde hay cambio de signo: como $g(0{,}5) > 0$ y $g(1) < 0$, se elige $[0{,}5;\ 1]$. La raíz es $x \approx 0{,}739$.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

Criterios. Se valora escribir la función a trozos, estudiar su continuidad en los puntos de cambio e interpretar el resultado en el contexto.

a. $I(9) = 108$, $I(10) = 100$, $I(24) = 240$, $I(25) = 225$.
b. Hay un salto a la baja en el precio unitario: $9 \cdot 12 = 108 > 10 \cdot 10 = 100$, por lo que añadir una persona reduce el ingreso total.
c. $P(x) \to 12 - 2 = 10$, que coincide con la tarifa de 10 €: ahora la tarifa sería continua.
d. En $n = 10$: por la izquierda $P = 12$ y por la derecha $P = 10$; los límites laterales son distintos, hay un salto.