Apuntes - Límites y continuidad

Curso: Universidad 1

El límite formaliza la idea de «acercarse» a un valor y es la base de la continuidad, la derivada y la integral. En este tema trabajamos con funciones de una variable real: definición, técnicas de cálculo, continuidad y los teoremas globales que se aplican a funciones continuas en intervalos cerrados.

Actividad de introducción

Un ciclista sube un puerto de Sierra Nevada y cada minuto anota su altitud. A medida que se acerca a la cima, situada a 2 500 m, la altitud tiende a ese valor, aunque nunca haya estado exactamente allí en los instantes medidos. ¿Podemos hablar del valor al que tiende una magnitud sin llegar a alcanzarlo? Esa es la idea del límite: describir el comportamiento de una función cerca de un punto y no solo en el punto. Con esa idea construiremos la continuidad (gráficas sin saltos) y los teoremas que garantizan la existencia de soluciones de una ecuación.

Definición de límite

Definición: definición de límite

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si 0 entonces $|f(x) - L|$. El valor de $f(a)$ no interviene. El límite existe si y solo si existen los dos límites laterales $\lim_{x\to a^-}$ y $\lim_{x\to a^+}$ y coinciden. También se definen los límites infinitos y en el infinito; una recta $x = a$ es **asíntota vertical** si algún límite lateral en a es infinito, y $y = L$ es **asíntota horizontal** si $f(x) \to L$ cuando $x \to \pm\infty$.

Propiedad

Propiedades. El límite del suma, producto y cociente (con límite del denominador no nulo) es la suma, producto y cociente de los límites. Si f está acotada y $g \to 0$, entonces $fg \to 0$. Regla del sandwich: si $h \le f \le g$ y $h, g \to L$, entonces $f \to L$.

Técnicas de cálculo

Definición: técnicas de cálculo

Para eliminar indeterminaciones $\frac{0}{0}$ se factoriza y se simplifica, o se multiplica por el conjugado; para $\frac{\infty}{\infty}$ se divide por la mayor potencia; para 1^∞ se usa $\lim (1+u)^{1/u} = e$ con $u \to 0$. Los **límites notables** son: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ y $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$. Más adelante la regla de L'Hôpital y los desarrollos de Taylor simplifican muchos casos.

Continuidad

Definición: continuidad

Una función es **continua en** a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$; es decir, existe $f(a)$, existe el límite y coinciden. Las funciones elementales son continuas en su dominio y la suma, producto, cociente y composición de continuas son continuas. Tipos de discontinuidad: **evitable** (el límite existe pero no coincide con el valor), de **salto** (laterales finitos distintos) y **esencial o infinita** (algún lateral infinito o inexistente).

Teorema: Teoremas en un intervalo cerrado

Teoremas en un intervalo cerrado $[a,b]$ (para f continua): *Bolzano*: si $f(a)f(b)$, existe $c \in (a,b)$ con $f(c) = 0$. *Valores intermedios*: f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. *Weierstrass*: f alcanza un máximo y un mínimo absolutos. Estos teoremas no calculan el valor exacto, pero garantizan existencia; el método de bisección los usa para aproximar raíces.

Método: calcular un límite

1. Sustituye y detecta si hay indeterminación.
2. Factoriza, racionaliza o divide por la mayor potencia.
3. Usa límites notables si procede.
4. Comprueba los límites laterales si hay valores absolutos o trozos.

Ejemplo 1

$\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$.

Ejemplo 2

Hallar a para que $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ si $x \neq 1$, $f(1) = a$, sea continua.

Como $\lim_{x\to 1}(x+1) = 2$, basta $a = 2$.

Ejemplo 3

La ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene solución en $(0,1)$ por Bolzano: $f(0) = -1$ y $f(1) = 1 > 0$.

¡Atención!

Sustituir sin comprobar si hay indeterminación; confundir el valor de la función con el límite; olvidar los límites laterales en valores absolutos o funciones definidas a trozos;

aplicar Bolzano sin comprobar que la función es continua en todo el intervalo; creer que $\sin(1/x)$ tiene límite en 0.

Definición: límites laterales e infinitos

Escribimos $\lim_{x\to a^-} f(x)$ cuando solo consideramos valores de x menores que a, y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ cuando solo consideramos valores mayores. El límite existe únicamente si ambos laterales existen y son iguales. Los límites infinitos describen funciones que crecen o decrecen sin cota, y los límites en el infinito describen el comportamiento a largo plazo. Estas tres ideas permiten estudiar las asíntotas y el comportamiento global de cualquier función elemental.

Método: estudiar la continuidad de una función definida a trozos

1. Comprueba que cada trozo es continuo en su intervalo abierto (polinomios, exponenciales y senos lo son siempre; los cocientes, salvo donde se anula el denominador).
2. En cada punto de unión calcula los dos límites laterales y el valor de la función.
3. Si los tres números coinciden, la función es continua; si los laterales coinciden pero el valor es distinto, la discontinuidad es evitable; si los laterales son finitos y distintos, hay un salto; si alguno es infinito o no existe, la discontinuidad es esencial.
4. Si el enunciado contiene parámetros, impón las igualdades y resuelve el sistema resultante.

Ejemplo 4

Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

Escribimos $\tan x - \sin x = \sin x\,\dfrac{1-\cos x}{\cos x}$. Entonces el cociente es $\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x} \to 1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$.

Ejemplo 5

Estudia la continuidad de $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ si $x \neq 2$ y $f(2) = 3$.

El límite en 2 es $\lim(x+2) = 4$, pero $f(2) = 3$. Los dos números son distintos, así que hay una discontinuidad evitable; si redefinimos $f(2) = 4$ la función pasa a ser continua en toda la recta.

Ejemplo 6

Una población de peces en un embalse de Extremadura sigue $N(t) = \dfrac{2000}{1 + 4e^{-0{,}3t}}$. ¿Qué ocurre a largo plazo?

Como $e^{-0{,}3t} \to 0$, resulta $N(t) \to 2000$. La población se estabiliza en 2 000 peces: la recta $y = 2000$ es una asíntota horizontal y representa la capacidad del embalse.

Comparación de infinitésimos y de infinitos

Para decidir rápidamente un límite conviene comparar órdenes de magnitud. Cuando $x \to 0$, las funciones x, $\sin x$, $\tan x$, $\ln(1+x)$ y $e^x - 1$ son equivalentes entre sí, es decir, su cociente tiende a 1. Cuando $x \to \infty$, el orden de crecimiento es siempre el mismo: las potencias de $\ln x$ crecen más despacio que cualquier potencia de x, y esta crece más despacio que cualquier exponencial a^x con $a > 1$. Por eso, en un cociente, mandan los términos de mayor orden y podemos despreciar los demás. Esta jerarquía evita muchos cálculos largos y permite adivinar el resultado antes de justificarlo con detalle.

¡Atención!

No se puede sustituir un infinitésimo equivalente dentro de una suma o resta: $\sin x \sim x$, pero $\sin x - x$ no es equivalente a $x - x = 0$. Tampoco debe darse por válido un límite calculado solo con la calculadora: la función puede oscilar o tener un comportamiento distinto al evaluar con muy pocos decimales. Y recuerda que $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ y $\frac{\infty}{\infty}$ son indeterminaciones, no resultados.

Observación

La continuidad de una función en un punto exige tres condiciones: que exista $f(a)$, que exista el límite en a y que ambos coincidan. Si falla la primera, el punto no está en el dominio; si falla la segunda, hay un salto o una asíntota; si falla la tercera, la discontinuidad es evitable. Esta lista sirve como guion en cualquier problema de continuidad.

¿Sabías que?

La definición con épsilon y delta se debe a Augustin-Louis Cauchy y a Karl Weierstrass, en el siglo XIX. Hasta entonces, el cálculo se apoyaba en cantidades infinitamente pequeñas sin una base rigurosa. El teorema de Bolzano se publicó en 1817 y hoy se usa en ordenadores para encontrar ceros de funciones: la calculadora científica resuelve ecuaciones aplicando versiones sofisticadas del método de bisección.

Teorema: valores intermedios y bisección

Si f es continua en $[a, b]$ y k es un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un $c \in [a, b]$ con $f(c) = k$. El método de bisección convierte este teorema en un algoritmo: se toma el punto medio del intervalo, se evalúa la función y se conserva la

mitad en la que sigue habiendo un cambio de signo. Tras n pasos, la raíz queda atrapada en un intervalo de longitud $(b-a)/2^n$. Por ejemplo, partiendo de un intervalo de longitud 1, diez pasos garantizan tres cifras decimales exactas. Aunque existan métodos más rápidos, la bisección nunca falla mientras la función sea continua, y esa fiabilidad la hace imprescindible como primer paso en cálculo numérico, en ingeniería y en programación de calculadoras.

Observación: continuidad de las funciones elementales

Los polinomios, las funciones racionales (en su dominio), las raíces, las exponenciales, los logaritmos y las funciones trigonométricas son continuas en todos los puntos donde están definidas. Además, la suma, el producto, el cociente (con denominador no nulo) y la composición de funciones continuas son continuas. Gracias a ello, la mayoría de los límites de funciones elementales se calculan por simple sustitución, y solo hay que trabajar cuando la sustitución produce una indeterminación o cuando la función cambia de expresión, como ocurre con los valores absolutos, las partes enteras y las funciones definidas a trozos.

Cómo estudiar este tema

Conviene repasar los límites notables hasta recordarlos de memoria, resolver varios ejercicios por semana y comprobar los resultados con un programa de cálculo simbólico. Así se desarrolla la intuición necesaria para los capítulos siguientes, donde el límite aparecerá como definición de derivada, de integral definida y de suma de una serie. En los exámenes universitarios de primer curso, los errores más habituales no vienen de la teoría, sino de simplificar mal, olvidar un signo al racionalizar o dejar un límite lateral sin calcular. Por eso es útil escribir cada paso, indicar la técnica empleada y comprobar el resultado con un valor numérico cercano al punto. Una buena práctica consiste en construir una tabla con valores de x próximos al punto, por ejemplo $0{,}1$, $0{,}01$ y $0{,}001$, y comparar la tendencia con el límite calculado. Si la tabla y el cálculo no coinciden, hay un error en alguna de las dos partes y merece la pena revisar los pasos con calma antes de continuar.

El consejo de Otto

si al sustituir sale $\frac{0}{0}$, hay algo que simplificar. Factoriza, racionaliza o usa un límite notable.