Ejercicios - Límites y continuidad

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Indeterminaciones 0/0 por factorización

Calcula los límites siguientes. Antes de factorizar, sustituye el valor y comprueba que aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$.

a. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

b. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

c. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Racionalizar con el conjugado

Cuando aparece una raíz cuadrada en una indeterminación $\frac{0}{0}$, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado.

a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

b. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

c. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Límites en el infinito

Divide numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparece (o compara grados).

a. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3x^2-x}{2x^2+5}$

b. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^3+1}{x^2+x}$

c. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Límites notables

Reconoce el límite notable y ajusta el argumento con una constante adecuada.

a. $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$
b. $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$
c. $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$
d. $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan x}{\sin 2x}$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Indeterminación uno elevado a infinito

Recuerda: si $u\to0$, entonces $(1+u)^{1/u}\to e$. En general, $\lim f^g = e^{\lim g\,(f-1)}$ cuando $f\to1$ y $g\to\infty$.

a. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$
b. $\lim_{x\to0}(1+3x)^{1/x}$
c. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Límites laterales y valor absoluto

Sea $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ si $x\neq2$ y *g(x)=\begin{cases}x^2&x*.

a. Calcula $\lim_{x\to2^-}f(x)$ y $\lim_{x\to2^+}f(x)$. ¿Existe $\lim_{x\to2}f(x)$?
b. Calcula los límites laterales de g en $x=1$ y decide si existe el límite.
c. ¿Es g continua en $x=1$? Justifícalo.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – El coste medio de una fábrica de camisetas

Una pequeña fábrica textil de Terrassa paga 500 € fijos al día de alquiler y 20 € de

materiales y mano de obra por cada camiseta fabricada. El coste medio por unidad al producir x camisetas es $C(x) = \dfrac{500 + 20x}{x}$. La tabla recoge algunos valores.

Unidades x	10	50	100	500
Coste medio $C(x)$ (€)	70	30	25	21

a. Comprueba con la fórmula que $C(50) = 30$ € y que $C(10) = 70$ €.
b. Calcula $\lim_{x \to \infty} C(x)$ e interpreta el resultado.
c. Calcula $\lim_{x \to 0^+} C(x)$ e interpreta la asíntota vertical.
d. ¿A partir de cuántas camisetas el coste medio baja de 22 €?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Asíntotas de una función racional

Estudia $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 - 4}$.

a. Determina el dominio.
b. Halla las asíntotas verticales calculando los límites laterales.
c. Halla la asíntota horizontal.
d. Calcula $f(0)$ y estudia el signo de f en los intervalos del dominio.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Valor de un parámetro para que sea continua

Considera $g(x) = \begin{cases} ax + 1 & x \leq 2 \\ x^2 + 1 & x > 2 \end{cases}$.

a. Calcula $\lim_{x \to 1} f(x)$ y halla k para que f sea continua en 1.
b. Halla a para que g sea continua en $x = 2$.
c. Con ese valor de a, ¿es g continua en todo $\mathbb{R}$?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Clasificar discontinuidades

Clasifica la discontinuidad de cada función en el punto indicado (evitable, de salto o esencial).

a. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ en $x = 0$, con $f(0) = 0$.
b. $g(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ en $x = 3$.

c. $h(x) = \dfrac{x}{|x|}$ en $x = 0$.

d. $k(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ en $x = 0$.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Teorema de Bolzano y bisección

Sea $f(x) = x^3 + x - 1$.

a. Demuestra que f tiene una raíz en $(0, 1)$.
b. Aplica dos pasos del método de bisección para localizarla en un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$.
c. Justifica por qué la raíz es única (sin calcularla).

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – La tarifa del aparcamiento

Un aparcamiento del centro de Valencia cobra 1,50 € la primera hora (o fracción) y 1 € por cada hora o fracción adicional, con un máximo de 8 € al día. Sea $T(h)$ el precio en euros por h horas de estancia, con 0.

a. Calcula $T(0{,}5)$, $T(1)$, $T(1{,}2)$ y $T(2)$.
b. Calcula los límites laterales de T en $h = 1$ y en $h = 2$. ¿Es continua?
c. ¿En qué intervalos es constante T? Describe la gráfica.
d. ¿Qué teorema falla para esta función en $[0{,}5;\ 3]$? Explica por qué no se aplica Bolzano.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Crecimiento de un cultivo de bacterias

En un laboratorio de la Universidad de Granada se cultivan bacterias en un medio limitado. El número de bacterias (en miles) al cabo de t horas sigue $P(t) = \dfrac{1000}{1 + 9e^{-t/2}}$.

a. Calcula $P(0)$: la población inicial.
b. Calcula $\lim_{t\to\infty} P(t)$ e interpreta el resultado (capacidad del medio).
c. ¿En qué instante la población alcanza la mitad de ese límite?
d. ¿Existe algún t con $P(t) = 1000$? Razona con el límite.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Carga de un condensador

En una práctica de laboratorio de física se carga un condensador. La carga acumulada

(en microculombios) es $Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ con $Q_0 = 80$ y $\tau = 2$ s.

a. Calcula $Q(0)$ y $\lim_{t\to\infty} Q(t)$.
b. Calcula $\lim_{t\to 0} \dfrac{Q(t)}{t}$ con un límite notable e interpreta el resultado como velocidad inicial de carga.
c. ¿Cuánto vale $Q(2)$? ¿Qué porcentaje de Q_0 es?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Una tarifa eléctrica continua

Una comercializadora de electricidad de Sevilla factura el recibo mensual (en euros) según el consumo x (kWh) con la función $F(x) = \begin{cases} 12 + 0{,}15x & 0 \le x \le 100 \\ a + 0{,}12x & 100300 \end{cases}$. La empresa quiere que la factura no dé saltos al cruzar los tramos.

a. Halla a para que F sea continua en $x = 100$.
b. Con ese a, halla b para que F sea continua en $x = 300$.
c. Calcula la factura de un hogar que consume 80, 250 y 400 kWh.
d. Calcula el precio medio $F(x)/x$ para 400 kWh y su límite cuando $x \to \infty$.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – La temperatura de un día de verano

La temperatura en una estación meteorológica de Zaragoza durante un día de julio es una función continua $T(h)$, con h en horas desde las 0:00. Se ha medido: $T(0) = 19\,^\circ$C, $T(6) = 17\,^\circ$C, $T(15) = 36\,^\circ$C y $T(24) = 21\,^\circ$C.

a. Demuestra que hubo al menos un instante entre las 6:00 y las 15:00 en que la temperatura fue exactamente 30 °C.
b. Demuestra que la temperatura fue de 25 °C al menos dos veces en el día.
c. ¿Se puede asegurar que a alguna hora la temperatura fue 40 °C? Razona.
d. Explica por qué existen una temperatura máxima y una mínima en el día.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Beneficio máximo de una tienda de ropa

El beneficio diario (en cientos de euros) de una tienda de Bilbao, durante las x primeras horas de apertura, viene dado por $B(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 10$ con $0 \le x \le 8$.

a. Justifica que B alcanza máximo y mínimo absolutos en $[0, 8]$.
b. Calcula $B'(x)$ y resuelve $B'(x) = 0$.
c. Evalúa B en los puntos críticos y en los extremos y determina máximo y mínimo.
d. Interpreta el resultado: ¿cuándo es máximo el beneficio?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Criterio del sándwich

El criterio del sándwich dice que si $h(x) \le f(x) \le g(x)$ cerca de a y $h, g \to L$, entonces $f \to L$.

a. Demuestra que $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = 0$.
b. Calcula $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x}$.
c. Calcula $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x}{x}$.
d. Explica por qué no se puede usar el sándwich para $\lim_{x\to\infty} \sin x$.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Definición épsilon-delta en la práctica

Una empresa de Murcia fabrica piezas cilíndricas con diámetro $d = 3x - 1$ mm, siendo x un parámetro de ajuste de la máquina. Para $x = 2$ el diámetro nominal es 5 mm. Se exige que el diámetro esté a menos de ε mm del nominal.

a. Escribe $|f(x) - 5|$ con $f(x) = 3x - 1$ en función de $|x - 2|$.
b. Si $\varepsilon = 0{,}03$ mm, halla el mayor δ que garantiza $|f(x) - 5|$ cuando 0.
c. Demuestra con la definición que $\lim_{x\to 2}(3x - 1) = 5$ eligiendo $\delta = \varepsilon/3$.
d. Interpreta δ en el taller: ¿con qué precisión debe ajustarse la máquina?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: límites que exigen más precisión

Estos límites combinan varias técnicas. Justifica cada paso. (Puedes usar los desarrollos $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$ y $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$, que veremos con Taylor.)

a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$
b. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^{1/x} - e}{x}$
c. $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$