# Soluciones - Límites y continuidad

Curso: Universidad 1

## Solución del ejercicio 1

**Planteamiento.** Al sustituir el valor de $x$ aparece $\frac{0}{0}$, lo que indica que numerador y denominador comparten un factor. Factorizamos ambos (diferencia de cuadrados, Ruffini o fórmula de segundo grado), simplificamos ese factor común y después sustituimos en la expresión ya simplificada.

a. Al sustituir queda $\frac{0}{0}$. Factorizamos: $\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \to 6$.
b. Numerador $(x-2)(x+3)$ y denominador $(x-2)(x+2)$. Simplificamos: $\frac{x+3}{x+2} \to \frac{5}{4}$.
c. Usamos $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$. Queda $x^2+2x+4 \to 4+4+4 = 12$.

## Solución del ejercicio 2

**Planteamiento.** La indeterminación $\frac{0}{0}$ procede de una raíz cuadrada. Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada para usar $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$: así desaparece la raíz del numerador, se cancela el factor que se anulaba y el límite se obtiene sustituyendo.

a. Multiplicamos por $\sqrt{x+4}+2$: el numerador es $(x+4)-4 = x$. Queda $\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \to \frac{1}{4}$.
b. Como $x-1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$, el cociente es $\sqrt{x}+1 \to 2$.
c. El conjugado es $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$; el numerador pasa a $(1+x)-(1-x) = 2x$. Queda $\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \to \frac{2}{2} = 1$.

## Solución del ejercicio 3

**Planteamiento.** En el infinito solo importan los términos de mayor grado. Dividimos numerador y denominador por la mayor potencia de $x$ del denominador; los cocientes del tipo $\frac{c}{x^k}$ tienden a 0 y el resultado depende de comparar los grados.

a. Dividimos por $x^2$: $\frac{3-1/x}{2+5/x^2} \to \frac{3}{2}$.
b. El grado del numerador (3) supera al del denominador (2), así que el cociente crece como $x$: el límite es $+\infty$.
c. Para $x$ se tiene $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Entonces $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x} = -\sqrt{1+1/x^2} \to -1$.

## Solución del ejercicio 4

**Planteamiento.** Cada límite se reduce a uno de los límites notables $\frac{\sin u}{u} \to 1$, $\frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2}$ o $\frac{e^u-1}{u} \to 1$, con $u \to 0$. Para ello multiplicamos y dividimos por la constante que haga coincidir el argumento con el denominador.

a. $\frac{\sin 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \to 3 \cdot 1 = 3$.
b. $\frac{1-\cos 2x}{x^2} = 4 \cdot \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} \to 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.
c. $\frac{e^{3x}-1}{x} = 3 \cdot \frac{e^{3x}-1}{3x} \to 3$.
d. $\frac{\tan x}{\sin 2x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2\cos x} \to \frac{1}{2}$.

## Solución del ejercicio 5

**Planteamiento.** Las indeterminaciones $1^\infty$ se resuelven llevándolas al número $e$. Comprobamos que la base tiende a 1 y el exponente a infinito, y aplicamos la regla $\lim f^g = e^{\lim g(f-1)}$, que reduce el problema a un límite de tipo $0 \cdot \infty$ más sencillo.

a. Con $g = x$ y $f - 1 = \frac{2}{x}$ resulta $g(f-1) = 2$, luego el límite es $e^2$.
b. Aquí $f - 1 = 3x$ y $g = \frac{1}{x}$, de modo que $g(f-1) = 3$. El límite es $e^3$.
c. $f - 1 = \frac{2}{x-1}$ y $g(f-1) = \frac{2x}{x-1} \to 2$. El límite es $e^2$.

## Solución del ejercicio 6

**Planteamiento.** Cuando la función tiene un valor absoluto o está definida a trozos, calculamos por separado los límites laterales, usando en cada lado la expresión que corresponde. El límite existe solo si los dos laterales coinciden; si no, hay un salto.

a. Si $x$, $|x-2| = -(x-2)$, luego $f = -1$. Si $x > 2$, $f = 1$. Los laterales son $-1$ y $1$, distintos: no existe el límite.
b. Por la izquierda $x^2 \to 1$; por la derecha $3 - x \to 2$. Son distintos, así que no existe el límite en 1.
c. No es continua en $x = 1$: el límite no existe (discontinuidad de salto finito de amplitud $2 - 1 = 1$).

## Solución del ejercicio 7

**Planteamiento.** Construimos primero la función de coste total sumando costes fijos y variables, y la dividimos entre el número de camisetas para obtener el coste medio. Su límite en el infinito indica el coste por unidad cuando la producción es muy grande.

a. $C(50) = \frac{500+1000}{50} = 30$ y $C(10) = \frac{500+200}{10} = 70$.
b. $C(x) = \frac{500}{x} + 20 \to 20$: aunque produzcamos muchísimo, el coste medio nunca baja de 20 € por camiseta (asíntota horizontal $y = 20$).
c. $C(x) \to +\infty$ cuando $x \to 0^+$: producir muy pocas unidades dispara el coste

medio por el alquiler fijo.
d. $\frac{500}{x} + 20$. Hacen falta más de 250 camisetas.

## Solución del ejercicio 8

**Planteamiento.** Las asíntotas verticales aparecen en los ceros del denominador que no anulan el numerador, y se confirman con los límites laterales. La horizontal se obtiene con el límite en el infinito, comparando los grados del numerador y del denominador.

a. El denominador se anula en $x = \pm 2$: dominio $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
b. En $x = 2$: el numerador vale 9 y $x^2 - 4 \to 0^+$ por la derecha, así que $f \to +\infty$; por la izquierda $x^2 - 4 \to 0^-$ y $f \to -\infty$. Análogamente en $x = -2$. Hay dos asíntotas verticales, $x = 2$ y $x = -2$.
c. $\lim_{x \to \pm\infty} f = \frac{2}{1} = 2$: asíntota horizontal $y = 2$.
d. $f(0) = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$. Como $2x^2 + 1 > 0$, el signo es el de $x^2 - 4$: positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y negativa en $(-2, 2)$.

## Solución del ejercicio 9

**Planteamiento.** Una función es continua en un punto si el límite existe y coincide con el valor de la función. Calculamos el límite (o los dos laterales, si la función cambia de expresión), lo igualamos al valor en el punto y despejamos el parámetro.

a. $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1 \to 2$; hace falta $k = 2$.
b. Por la izquierda $g(2) = 2a + 1$; por la derecha $2^2 + 1 = 5$. Igualamos: $2a + 1 = 5$, luego $a = 2$.
c. Sí: cada trozo es polinómico (continuo) y en el punto de unión los límites laterales coinciden con el valor.

## Solución del ejercicio 10

**Planteamiento.** Para clasificar una discontinuidad calculamos los límites laterales en el punto. Si existen y coinciden, la discontinuidad es evitable; si existen pero son distintos, es de salto; y si alguno es infinito o no existe, es esencial.

a. El límite vale 1 pero $f(0) = 0$: discontinuidad evitable (basta redefinir $f(0) = 1$).
b. Los laterales son $-\infty$ y $+\infty$: discontinuidad esencial (asíntota vertical).
c. Laterales $-1$ y $1$: discontinuidad de salto finito.
d. Al acercarnos a 0 oscila entre $-1$ y 1 sin tender a ningún valor: no existe el límite y es esencial (sin asíntota).

## Solución del ejercicio 11

**Planteamiento.** El teorema de Bolzano garantiza una raíz si la función es continua y

cambia de signo en los extremos de un intervalo. La bisección repite la idea: evaluamos en el punto medio y conservamos la mitad donde sigue habiendo cambio de signo.

a. $f$ es continua (polinomio), $f(0) = -1$ y $f(1) = 1 > 0$. Por Bolzano existe $c \in (0,1)$ con $f(c) = 0$.
b. Punto medio $\frac{1}{2}$: $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8}$, así que la raíz está en $(\frac{1}{2}, 1)$. Punto medio $\frac{3}{4}$: $f(\frac{3}{4}) = \frac{27}{64} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{11}{64} > 0$. La raíz está en $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, de longitud $\frac{1}{4}$.
c. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, luego $f$ es estrictamente creciente y no puede anularse dos veces.

## Solución del ejercicio 12

**Planteamiento.** La tarifa es una función a trozos de tipo escalera: el precio salta cada vez que se empieza una hora nueva. Evaluamos con cuidado en cada tramo, estudiamos los límites laterales en los puntos de salto e interpretamos las discontinuidades.

a. $T(0{,}5) = 1{,}5$; $T(1) = 1{,}5$; $T(1{,}2) = 2{,}5$ (segunda hora empezada); $T(2) = 2{,}5$.
b. En $h = 1$: por la izquierda 1,5 y por la derecha 2,5. En $h = 2$: 2,5 y 3,5. Hay saltos finitos de 1 €, así que $T$ no es continua.
c. Es constante en $(0, 1]$ (1,5 €), $(1, 2]$ (2,5 €), $(2, 3]$ (3,5 €), y así hasta alcanzar el máximo de 8 €. La gráfica es una escalera con el punto relleno a la derecha de cada escalón.
d. Falla la continuidad: $T(0{,}5) = 1{,}5$ y $T(3) = 3{,}5$, pero $T$ nunca toma el valor 2 o 3 en ese intervalo. Sin continuidad no hay valores intermedios.

## Solución del ejercicio 13

**Planteamiento.** Evaluamos el modelo en los instantes pedidos y calculamos su límite cuando $t \to \infty$, que representa la población máxima que admite el medio. Comparar los valores con ese límite permite interpretar la situación biológica.

a. $P(0) = \frac{1000}{1+9} = 100$ mil bacterias.
b. $e^{-t/2} \to 0$, luego $P \to \frac{1000}{1} = 1000$ mil: el medio admite como máximo un millón de bacterias.
c. $P(t) = 500 \iff 1 + 9e^{-t/2} = 2 \iff e^{-t/2} = \frac{1}{9} \iff t = 2\ln 9 \approx 4{,}39$ h.
d. No: $1 + 9e^{-t/2} > 1$ siempre, así que $P(t)$ para todo $t$. El límite se aproxima pero no se alcanza (asíntota horizontal).

## Solución del ejercicio 14

**Planteamiento.** La carga es una función exponencial que crece hacia un valor límite. Calculamos los valores en los instantes indicados, el límite cuando $t \to \infty$ y, para los tiempos pedidos, despejamos $t$ tomando logaritmos neperianos.

a. $Q(0) = 80(1-1) = 0$ y $Q(t) \to 80 \cdot (1-0) = 80$ µC.
b. $\frac{Q(t)}{t} = 80 \cdot \frac{1-e^{-t/2}}{t} = 40 \cdot \frac{1-e^{-t/2}}{t/2}$. Como $\frac{e^u-1}{u} \to 1$ con $u = -t/2$, el límite es $40$ µC/s: la carga crece inicialmente a 40 µC por segundo.
c. $Q(2) = 80(1-e^{-1}) \approx 80 \cdot 0{,}632 = 50{,}6$ µC, es decir, el 63,2 % de $Q_0$.

## Solución del ejercicio 15

**Planteamiento.** La factura es continua si los dos tramos dan el mismo importe en el consumo frontera. Calculamos los límites laterales en ese punto, imponemos que coincidan y comprobamos después el resultado con algún consumo concreto.

a. En 100: $12 + 0{,}15 \cdot 100 = 27$ y $a + 12 = 27$, luego $a = 15$.
b. En 300: $15 + 0{,}12 \cdot 300 = 51$ y $b + 30 = 51$, luego $b = 21$.
c. $F(80) = 12 + 12 = 24$ €; $F(250) = 15 + 30 = 45$ €; $F(400) = 21 + 40 = 61$ €.
d. $\frac{F(400)}{400} = 0{,}1525$ €/kWh. En general $\frac{F(x)}{x} = \frac{21}{x} + 0{,}10 \to 0{,}10$ €/kWh: el término fijo pierde peso al crecer el consumo.

## Solución del ejercicio 16

**Planteamiento.** Como la temperatura es continua, el teorema de los valores intermedios asegura que toma todos los valores comprendidos entre dos medidas. Buscamos intervalos donde la temperatura pase por encima y por debajo del valor pedido.

a. $T$ es continua en $[6, 15]$ y $17$. Por el teorema de los valores intermedios, existe $h \in (6, 15)$ con $T(h) = 30$.
b. Entre las 6:00 y las 15:00 ($17$) hay un valor; entre las 15:00 y las 24:00 ($36 > 25 > 21$) hay otro. Los intervalos son disjuntos, luego al menos dos instantes distintos.
c. No: el teorema solo garantiza valores entre los extremos medidos; 40 °C está fuera de $[17, 36]$ y los datos no permiten asegurarlo.
d. $T$ es continua en el intervalo cerrado $[0, 24]$: por el teorema de Weierstrass alcanza un máximo y un mínimo absolutos.

## Solución del ejercicio 17

**Planteamiento.** El teorema de Weierstrass garantiza máximo y mínimo absolutos de una función continua en un intervalo cerrado. Calculamos los candidatos (extremos del intervalo y puntos donde la derivada se anula) y comparamos sus valores.

a. $B$ es polinómica, luego continua en $[0, 8]$: se aplica Weierstrass.
b. $B'(x) = -3x^2 + 18x - 15 = -3(x^2 - 6x + 5) = -3(x-1)(x-5)$, con ceros $x = 1$ y $x = 5$.
c. $B(0) = 10$; $B(1) = -1 + 9 - 15 + 10 = 3$; $B(5) = -125 + 225 - 75 + 10 = 35$; $B(8) = -512 + 576 - 120 + 10 = -46$. Máximo absoluto 35 en $x = 5$ y mínimo

absoluto $-46$ en $x = 8$.

d. El beneficio es máximo (3 500 €) tras 5 horas de apertura; si se prolonga hasta 8 horas hay pérdidas por los gastos de personal.

## Solución del ejercicio 18

**Planteamiento.** Encerramos la función entre dos funciones más sencillas que tienen el mismo límite, usando que el seno y el coseno están entre $-1$ y $1$. Por el criterio del sándwich, la función intermedia tiene necesariamente ese mismo límite.

a. Como $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$, resulta $-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$. Ambos extremos tienden a 0, luego el límite es 0.

b. $-\frac{1}{x} \le \frac{\cos x}{x} \le \frac{1}{x}$ para $x > 0$ y ambas cotas tienden a 0: el límite es 0.

c. $\frac{x+\sin x}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x}$ y $\frac{\sin x}{x} \to 0$ por el apartado anterior; el límite es 1.

d. Porque no hay cotas que converjan al mismo valor: $\sin x$ oscila entre $-1$ y 1 sin límite.

## Solución del ejercicio 19

**Planteamiento.** La definición épsilon-delta dice cuánto hay que acercar $x$ al valor nominal para garantizar una tolerancia en el resultado. Escribimos $|f(x) - L|$ en función de $|x - a|$ y despejamos el $\delta$ que asegura un error menor que $\varepsilon$.

a. $|f(x) - 5| = |3x - 6| = 3|x - 2|$.

b. Se necesita $3|x - 2|$, es decir $|x - 2|$: $\delta = 0{,}01$.

c. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon/3$. Si $0$, entonces $|f(x) - 5| = 3|x - 2|$. Queda demostrado.

d. El parámetro debe ajustarse con un error inferior a 0,01 unidades para que el diámetro quede dentro de la tolerancia de 0,03 mm.

## Solución del ejercicio 20

**Planteamiento.** Son límites con indeterminaciones que se resuelven con desarrollos de Taylor: sustituimos cada función por los primeros términos de su desarrollo, simplificamos las potencias de $x$ y nos quedamos con el término dominante.

a. $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$; dividiendo por $x^2$ obtenemos $\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \cdots \to \frac{1}{2}$.

b. $(1+x)^{1/x} = \exp\!\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp\!\left(1 - \frac{x}{2} + \cdots\right) = e\,(1 - \frac{x}{2} + \cdots)$. Entonces $\frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \to -\frac{e}{2}$.

c. Multiplicamos por el conjugado: $x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x}{x(\sqrt{1+1/x^2}+1)} \to \frac{1}{2}$.