Soluciones del examen - Integrales y aplicaciones

Curso: Universidad 1 · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (6 puntos)

Criterios. Se valora identificar la técnica (cambio de variable, partes, fracciones simples) y aplicar bien la regla de Barrow.

a. El numerador es la derivada del denominador: $\ln(x^2+3x+5)+C$. Es inmediata, del tipo $\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u|$; el valor absoluto sobra porque $x^2+3x+5>0$ (discriminante negativo).

b. Por partes: $\int xe^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x}$. Entre 0 y 1: $(-e^{-1}-e^{-1})-(-1) = 1-\frac{2}{e} \approx 0{,}264$. Se toma $u=x$ y $dv=e^{-x}dx$.

c. $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}$. Entre 0 y 2: $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$. Se usa $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ con $a=2$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

Criterios. Se valora hallar los puntos de corte, decidir qué curva está encima y calcular el área sin errores de signo.

a. $\sqrt{x} = x^2 \iff x=0$ o $x=1$. En $(0,1)$, $\sqrt{x} > x^2$ (por ejemplo, en $x=\frac{1}{4}$: $0{,}5 > 0{,}0625$). Elevando al cuadrado, $x = x^4$, es decir, $x(x^3-1)=0$.

b. $A = \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. El área es la integral de la curva superior menos la inferior. Comprobación: el área es positiva y menor que 1, el área del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ que contiene la región.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

Criterios. Se valora escribir la integral impropia como límite y concluir con claridad si converge o diverge.

a. $\int_1^b x^{-3}dx = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{b^2}\right) \to \frac{1}{2}$. Converge. Se escribe como $\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-3}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b$. En general, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge si y solo si $p>1$; aquí $p=3$.

b. Por partes, $\int_0^b xe^{-x}dx = 1-(b+1)e^{-b} \to 1$. Converge a 1. Con $u=x$ y $dv=e^{-x}dx$: $\int xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}$. El término $(b+1)e^{-b}$ tiende a 0 porque la exponencial crece más deprisa que cualquier polinomio.

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

Criterios. Se valora plantear la fórmula de los discos, calcular el límite y comentar la paradoja del resultado.

a. $\pi \int_1^{\infty} x^{-2} dx = \pi \cdot 1 = \pi$. Por el método de los discos, $V = \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$, y $\int_1^{b} x^{-2} dx = 1 - \frac{1}{b} \to 1$.

b. La integral de x^{-2} converge, mientras que $\int \frac{dx}{x}$ diverge; el volumen es finito aunque la longitud de la curva y el área bajo ella no lo son. La paradoja: se podría llenar con π unidades cúbicas de pintura, pero no habría pintura suficiente para cubrir su superficie.

Solución del ejercicio 5 (3 puntos)

Criterios. Se valora relacionar caudal y volumen mediante la integral y responder a cada pregunta con unidades.

a. $\int_0^{30} 0{,}6t \, dt = \left[0{,}3t^2\right]_0^{30} = 270$ m³. El volumen que sale es la integral del caudal, que es la tasa de salida.

b. $500 - 270 = 230$ m³. Queda el 46 % del volumen inicial.

c. $0{,}3t^2 = 125 \Rightarrow t^2 = 416{,}7 \Rightarrow t \approx 20{,}4$ min. Un cuarto de 500 m³ son 125 m³; se busca T con $\int_0^{T} 0{,}6t \, dt = 0{,}3T^2 = 125$ y se toma la raíz positiva.

d. $V(t) = 500 - 0{,}3t^2$ y $V'(t) = -0{,}6t$, luego $V'(10) = -6$ m³/min. La derivada negativa indica que a los 10 minutos el tanque pierde 6 m³ por minuto, justo el caudal $q(10)$.