Apuntes - Integrales y aplicaciones

Curso: Universidad 1

La integral de Riemann formaliza el área bajo una curva. Su teorema fundamental la une con la derivada y proporciona un método de cálculo mediante primitivas. Además de áreas, sirve para volúmenes, longitudes, valores medios y modelos de acumulación.

Actividad de introducción

Un grifo llena un depósito con un caudal que cambia durante el día: al principio sale poco agua y después mucha. ¿Cómo saber cuántos litros hay a mediodía? Si el caudal fuera constante bastaría multiplicar por el tiempo, pero si varía hay que sumar muchísimos trozos pequeños de la forma caudal por tiempo. Esa suma, llevada al límite cuando los trozos se hacen infinitamente finos, es la integral definida. El resultado sorprendente es que esa suma se calcula con una primitiva del caudal, es decir, deshaciendo la derivada. Ese puente entre derivar e integrar es el teorema fundamental del cálculo.

Integral definida y primitivas

Definición: integral definida y primitivas

Dada f acotada en $[a,b]$, se aproxima el área con sumas de Riemann $\sum f(\xi_i)\Delta x_i$. Si el límite existe, f es **integrable** y $\int_a^b f$ es ese límite. Toda función continua (y toda monótona) en $[a,b]$ es integrable. Propiedades: linealidad, aditividad en el intervalo, monotonía y $\blacksquare$. El **valor medio** de f en $[a,b]$ es $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

Teorema: Teorema fundamental del cálculo

Teorema fundamental del cálculo. Si f es continua, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y $F'=f$. **Regla de Barrow:** si $G'=f$, $\int_a^b f = G(b)-G(a)$. Con límites variables, $\frac{d}{dx}\int_0^{u(x)} f = f(u(x))\,u'(x)$.

Técnicas de integración

Regla: Inmediatas

Inmediatas y linealidad: $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n\neq -1)$, $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$, $\int e^x = e^x$. **Sustitución:** $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)\,du$. **Por partes:** $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (se elige u que se simplifique al derivar: logaritmos, polinomios). **Fracciones simples** para cocientes de polinomios: se factoriza el denominador y se descompone. **Trigonométricas:** $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; potencias impares se reducen separando un factor y sustituyendo.

Aplicaciones geométricas

Definición: aplicaciones geométricas

El área entre $y = f$ e $y = g$ con $f \geq g$ es $\int_a^b (f - g)$. El volumen de revolución alrededor del eje OX es $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$ (método de discos). La longitud de curva es $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$.

Integrales impropias

Definición: integrales impropias

Cuando el intervalo es infinito o la función no está acotada se define por límite: $\int_1^\infty f = \lim_{M \to \infty} \int_1^M f$. Referencia: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge si y solo si $p > 1$, y $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ converge si y solo si p. Se pueden comparar integrales impropias de funciones positivas igual que series.

Método: integrar por partes

1. Identifica u (la que se simplifica al derivar) y dv.
2. Calcula du y v.
3. Aplica uv − ∫ v du.
4. Comprueba el resultado derivando.

Ejemplo 1

Por partes: $\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = (x - 1)e^x + C$**.**

Ejemplo 2

Área entre $y = x$ **e** $y = x^2$**: los cortes son 0 y 1, y** $\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$**.**

Ejemplo 3

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{M \to \infty} \left(1 - \frac{1}{M}\right) = 1$**.**

¡Atención!

Olvidar la constante C; no cambiar los límites al sustituir en una integral definida; integrar $1/x^2$ como logaritmo; tomar área con signo cuando se pide área geométrica (hay que dividir en tramos donde la función cambia de signo); aplicar Barrow a

funciones con discontinuidades dentro del intervalo.

Definición: suma de Riemann

Dividimos $[a, b]$ en n trozos de anchura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y sumamos las áreas de los rectángulos $f(x_i)\Delta x$. La integral definida es el límite de esas sumas cuando $n \to \infty$, siempre que exista. Para funciones continuas existe siempre, y se interpreta como el área con signo entre la gráfica y el eje horizontal: lo que queda por encima cuenta positivo y lo que queda por debajo, negativo.

Propiedad: linealidad y aditividad

La integral definida es lineal: $\int (af + bg) = a\int f + b\int g$. Es aditiva respecto del intervalo: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Intercambiar los límites cambia el signo y, si $f \geq 0$, entonces $\int_a^b f \geq 0$. Estas propiedades justifican dividir una integral en trozos cuando la función cambia de expresión o de signo.

Método: cambio de variable en una integral definida

1. Elige $u = g(x)$ de modo que $g'(x)\,dx$ aparezca en el integrando.
2. Cambia también los límites de integración: si x va de a a b, la nueva variable va de $g(a)$ a $g(b)$.
3. Integra en la variable u sin volver a la variable original.
4. Evalúa en los nuevos límites; no hace falta deshacer el cambio.

Ejemplo 4

Calcula $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Sea $u = 1 + x^2$, $du = 2x\,dx$. Los límites pasan de $x = 0, 1$ a $u = 1, 2$. La integral es $\frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2} du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}609$.

Ejemplo 5

Calcula el área bajo $y = \sin x$ entre 0 y 2π y la integral de $\sin x$ en el mismo intervalo.

$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = 0$, porque las áreas por encima y por debajo se compensan. El área geométrica se obtiene con el valor absoluto: $2\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2 \cdot 2 = 4$.

Ejemplo 6

Una piscina municipal de Burgos se llena con un caudal $q(t) = 20 + 4t$ m³/h.

¿Cuánta agua entra en las 5 primeras horas?

$\int_0^5 (20 + 4t)\,dt = [20t + 2t^2]_0^5 = 100 + 50 = 150$ m³.

Aplicaciones geométricas y físicas

El área entre dos curvas se calcula integrando la diferencia entre la función superior y la inferior. Si las curvas se cruzan, se divide el intervalo en los puntos de corte. El volumen de un sólido de revolución generado al girar la región bajo $y = f(x)$ alrededor del eje x vale $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$, y con el método de capas se calcula respecto del eje vertical como $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$. La longitud de un arco es $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$. En física, la integral de la velocidad es el desplazamiento, la de la potencia es la energía y la de la fuerza respecto de la posición es el trabajo. En economía, integrando un coste marginal se obtiene el coste total, y la diferencia entre lo que los consumidores estarían dispuestos a pagar y lo que pagan se llama excedente del consumidor.

Cómo elegir la técnica de integración

Ante una integral nueva conviene seguir un orden de prueba para no perder tiempo. Primero se comprueba si es inmediata o si se reduce a una inmediata con una pequeña constante multiplicativa. Si el integrando contiene una función compuesta y, multiplicando, la derivada de la función interior, se hace un cambio de variable. Si aparece un producto de una función algebraica por una exponencial, un seno, un coseno o un logaritmo, se intenta la integración por partes, eligiendo como u la función que se simplifica al derivar. Si el integrando es un cociente de polinomios, se divide si el grado del numerador no es menor, y después se descompone el cociente en fracciones simples según las raíces del denominador. Las integrales trigonométricas con potencias pares suelen resolverse con las fórmulas del ángulo doble, y las que contienen raíces del tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$ con la sustitución trigonométrica $x = a \sin\theta$. Con la práctica, reconocer el patrón es cuestión de segundos, y comprobar el resultado derivando es siempre posible y recomendable. Cuando una integral definida tiene límites simétricos, conviene observar si el integrando es par o impar: en el caso impar la integral vale cero, y en el par basta calcular el doble de la integral entre cero y el límite superior. Estos atajos ahorran cálculos largos y reducen la probabilidad de cometer errores de signo, que son la principal causa de resultados incorrectos en los exámenes de integración.

Integración numérica

Muchas integrales no tienen primitiva elemental, como $\int e^{-x^2}\,dx$, o se conocen solo a partir de datos tabulados. Entonces se aproximan con fórmulas numéricas. La regla de los trapecios sustituye la curva por segmentos en cada subintervalo; la regla de Simpson la sustituye por parábolas y exige un número par de subintervalos. El error de Simpson decrece como la cuarta potencia de la anchura de paso, por lo que duplicar los puntos reduce el error unas dieciséis veces. En topografía, hidrología y medicina se usan a diario estas fórmulas para calcular áreas de terrenos, caudales de ríos o volúmenes de órganos a partir de mediciones discretas.

¡Atención!

Olvidar la constante C en una primitiva, no cambiar los límites al hacer un cambio de variable y confundir integral con área son los errores más comunes. Si la función cambia de signo, $\int_a^b f$ no es el área: hay que partir el intervalo en los ceros de f. Tampoco se puede integrar $\frac{1}{x^2}$ entre -1 y 1 como si la función fuese continua: tiene una asíntota en 0 y la integral impropia diverge.

Observación

Derivar es un proceso mecánico, mientras que integrar es un arte: no existe una receta que sirva para todas las funciones. Por eso conviene seguir un orden de prueba: primero buscar una primitiva inmediata, después un cambio de variable, luego la integración por partes y, para cocientes de polinomios, las fracciones simples. Si nada funciona, la integral probablemente no tenga primitiva elemental y se recurre a métodos numéricos. En la práctica profesional, ingenieros y científicos combinan ambos mundos: usan las técnicas analíticas para obtener fórmulas generales y los programas de cálculo para casos concretos con datos reales, y siempre comprueban que el orden de magnitud del resultado sea razonable, por ejemplo comparando con una estimación gruesa del área o del volumen buscado.

¿Sabías que?

Arquímedes ya calculó el área de un segmento de parábola hace más de 2 200 años con un método de agotamiento que anticipa la integral. El símbolo $\int$ es una S alargada, por la palabra latina *summa*, introducida por Leibniz en 1675. Hoy, el cálculo de áreas por integración numérica se utiliza en medicina para estimar el gasto cardíaco a partir de curvas de dilución.

El consejo de Otto

comprueba siempre una primitiva derivándola. Es la forma más rápida de detectar un error de signo o un factor perdido.