Ejercicios - Integrales y aplicaciones

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Primitivas inmediatas

Calcula las primitivas siguientes y comprueba cada resultado derivando.

a. $\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$
b. $\int e^{2x}\,dx$
c. $\int \dfrac{dx}{x+1}$
d. $\int \cos 3x\,dx$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Integración por cambio de variable

Reconoce la función interior $u = g(x)$ y su derivada, que debe aparecer multiplicando.

a. $\int 2x e^{x^2}\,dx$
b. $\int \dfrac{x}{x^2+1}\,dx$
c. $\int \sin^3 x \cos x\,dx$
d. $\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Integración por partes

Usa $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ eligiendo u según el criterio ALPES (logaritmo, algebraica, potencia, exponencial, seno).

a. $\int x e^x\,dx$
b. $\int x \ln x\,dx$
c. $\int x^2 \sin x\,dx$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Fracciones simples

Descompón la fracción racional en fracciones simples antes de integrar.

a. $\int \dfrac{dx}{x^2-1}$
b. $\int \dfrac{x+3}{x^2+x-2}\,dx$
c. $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Integral definida y teorema fundamental

Aplica la regla de Barrow $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ y el teorema fundamental del cálculo.

a. $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$
b. $\int_1^e \ln x\,dx$
c. Si $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, calcula $G'(x)$ y $G'(1)$.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Área entre dos curvas

Calcula el área de la región limitada por $y = x^2$ y $y = x + 2$.

a. Halla los puntos de corte.
b. Decide cuál función está por encima en el intervalo.
c. Plantea y calcula la integral del área.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – El depósito de agua de una urbanización

Una urbanización de Alicante llena su depósito con una bomba cuyo caudal (en m³/h) varía con el tiempo según $q(t) = 6 + 2t - 0{,}1t^2$, con t en horas desde las 8:00 y $0 \le t \le 10$.

a. Calcula el caudal a las 8:00 y a las 18:00.
b. ¿En qué instante es máximo el caudal y cuánto vale?
c. Calcula el volumen total que entra entre las 8:00 y las 18:00.
d. Si el depósito tiene 150 m³ de capacidad y empezó vacío, ¿se llena en ese periodo?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Desplazamiento y distancia recorrida

Un tren de cercanías de Barcelona recorre un tramo recto en el que, durante 4 minutos, su velocidad (en hectómetros por minuto) respecto del sentido de marcha es

$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$. Un valor negativo significa que se mueve hacia atrás (maniobra).

a. Halla los instantes en que $v(t) = 0$.
b. Calcula el desplazamiento $\int_0^4 v(t)\,dt$.
c. Calcula la distancia total recorrida $\int_0^4 |v(t)|\,dt$ separando por intervalos de signo.
d. Explica por qué desplazamiento y distancia no coinciden.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – De coste marginal a coste total

Una panadería de Valladolid estima que el coste marginal de producir la barra número x (en céntimos de euro por barra) es $C'(x) = 40 - 0{,}2x$, para $0 \le x \le 100$ barras al día.

a. Calcula el coste marginal de la barra 50 y de la barra 100.
b. Calcula el coste de producir las 100 barras si no hay costes fijos.
c. Calcula el coste de pasar de 50 a 100 barras, $\int_{50}^{100} C'(x)dx$.
d. Si hay un coste fijo de 500 céntimos, escribe la función de coste total $C(x)$.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Temperatura media de un día en Sevilla

En un día de primavera la temperatura en Sevilla (en °C) entre las 8:00 y las 20:00 se modela con $T(t) = 15 + 10\sin\dfrac{\pi(t-8)}{12}$, donde t es la hora.

a. Calcula $T(8)$, $T(14)$ y $T(20)$.
b. Calcula $\int_8^{20} T(t)\,dt$.
c. Calcula la temperatura media .
d. ¿Es mayor la media que la temperatura a las 8:00? ¿En qué instante se alcanza exactamente la media?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El trabajo de un muelle

En el laboratorio de física de la Universidad de Oviedo se estudia un muelle cuya fuerza recuperadora (en newtons) cuando se estira x metros es $F(x) = 200x$ (ley de Hooke con $k = 200$ N/m).

a. Calcula la fuerza necesaria para estirar 5 cm.
b. Calcula el trabajo $W = \int_0^{0{,}10} 200x\,dx$ para estirarlo 10 cm.
c. Calcula el trabajo adicional para estirarlo de 10 cm a 20 cm.
d. Compara los dos trabajos y explica por qué el segundo es el triple del primero.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Volumen de una copa

Una copa de una vinoteca de La Rioja se obtiene haciendo girar alrededor del eje x la curva $y = \sqrt{x}$ para $0 \le x \le 4$ (unidades en decímetros).

a. Escribe la fórmula del volumen de un sólido de revolución $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.
b. Calcula el volumen exacto de la copa.
c. Pasa el resultado a litros (1 dm³ = 1 L).
d. ¿Qué altura de líquido, medida desde el vértice, contiene la mitad del volumen?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Excedente del consumidor en un mercado

En un mercado municipal de Santander, la demanda de un producto sigue $p(x) = 50 - 0{,}5x$ (precio en euros por unidad cuando se compran x unidades) y la oferta $p(x) = 10 + 0{,}5x$.

a. Halla el punto de equilibrio (x_0, p_0).
b. Calcula el excedente del consumidor $\int_0^{x_0} [p_d(x) - p_0]dx$.
c. Calcula el excedente del productor $\int_0^{x_0} [p_0 - p_o(x)]dx$.
d. Interpreta ambos números.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Crecimiento de una población

La población de una ciudad media gallega crece a un ritmo (en miles de habitantes por año) $r(t) = 3e^{0{,}03t}$, con t en años desde 2020. En 2020 tenía 100 mil habitantes.

a. Calcula el ritmo de crecimiento en 2020 y en 2030.
b. Calcula el aumento de población entre 2020 y 2030.
c. Escribe la población $P(t)$ y calcula $P(10)$.
d. Comprueba que $P'(t) = r(t)$.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: el área de una parcela irregular

Un agrimensor de Castilla-La Mancha mide la anchura y de una parcela de olivos, cuyo borde superior es curvo, cada 10 m a lo largo de una recta de 40 m. La tabla recoge los datos. Se quiere estimar el área sin conocer la ecuación del borde.

x (m)	0	10	20	30	40
Anchura y (m)	12	18	21	16	9

a. Estima el área con el método de los trapecios, $A \approx h\left[\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1}\right]$.
b. Estima el área con la regla de Simpson, $A \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4]$.
c. Compara los dos resultados: ¿cuál es mayor y por qué difieren?
d. Si cada olivo ocupa 36 m², estima cuántos caben con el valor de Simpson.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: dosis acumulada y convergencia de integrales impropias

Tras una inyección en un hospital de Valencia, el fármaco se elimina del organismo y la tasa de exposición (en mg·h/L por hora) es $c(t) = 5e^{-t/5}$ para $t \geq 0$ horas. La exposición total es la integral impropia $\int_0^{\infty} c(t)\,dt$. Además se quiere practicar con otras integrales impropias.

a. Calcula $\int_0^b 5e^{-t/5}dt$ y haz $b \to \infty$.
b. ¿Qué fracción de la exposición total se alcanza a las 10 horas?
c. Estudia $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ y $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.
d. Estudia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (impropia en 0).

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: sólidos de revolución por discos y capas

Una empresa de cerámica de Talavera de la Reina diseña un jarrón girando alrededor del eje y la región limitada por $y = x^2$, el eje y y la recta $y = 4$ (unidades en decímetros).

a. Dibuja mentalmente la región y calcula el volumen por discos respecto del eje y: $V = \pi \int_0^4 x^2\,dy$ con $x^2 = y$.
b. Calcula el volumen con el método de capas, $V = 2\pi \int_0^2 x\,(4 - x^2)\,dx$.
c. Comprueba que ambos resultados coinciden.
d. Si el jarrón se llena de agua, ¿cuántos litros caben?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: la función área acumulada

Una cooperativa agrícola de Almería modela con $f(t) = t^2 - 4t + 3$ el ritmo neto (en toneladas por semana) al que cambia el stock de un almacén: positivo si entra más producto del que sale. Sea $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ la variación acumulada del stock en x semanas.

a. Calcula $G(x)$ explícitamente.
b. Usa el teorema fundamental para calcular $G'(x)$ y los puntos críticos de G.

c. Clasifica los puntos críticos y calcula los valores de G en ellos.
d. Interpreta: ¿en qué semanas el stock es máximo y mínimo localmente?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: valor medio de una función

El teorema del valor medio integral dice que si f es continua en $[a,b]$, existe c con $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$. Un técnico de Iberdrola lo usa con la potencia consumida por una máquina.

a. Calcula el valor medio de $f(x)=x^2$ en $[0,3]$ y halla c.
b. La potencia de un motor (en kW) en 6 h es $P(t)=2+t-0{,}1t^2$. Calcula la energía $\int_0^6 P\,dt$ en kWh.
c. Calcula la potencia media en esas 6 horas.
d. ¿En qué instante la potencia coincide con la media?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: integrales que exigen ingenio

Calcula cada integral justificando el método.

a. $\int e^x \sin x\,dx$
b. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$
c. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (interpreta el resultado geométricamente).