Soluciones - Integrales y aplicaciones

Curso: Universidad 1

Solución del ejercicio 1

Planteamiento. Son integrales inmediatas: cada integrando es la derivada de una función conocida, quizá multiplicada por una constante. Escribimos la primitiva usando la tabla de derivadas al revés, añadimos la constante C y comprobamos el resultado derivando.

a. $x^3 - 2x^2 + 5x + C$. Comprobación: la derivada es $3x^2 - 4x + 5$.
b. Como $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, una primitiva es $\frac{1}{2}e^{2x} + C$.
c. $\ln|x+1| + C$.
d. $\frac{1}{3}\sin 3x + C$, pues la regla de la cadena aporta el factor 3.

Solución del ejercicio 2

Planteamiento. Buscamos una función interior $u = g(x)$ cuya derivada aparezca multiplicando en el integrando. Con el cambio $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$, la integral se convierte en una inmediata en la variable u; al final deshacemos el cambio.

a. Con $u = x^2$, $du = 2x\,dx$: $\int e^u\,du = e^{x^2} + C$.
b. Con $u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$: $\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.
c. Con $u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$: $\int u^3 du = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.
d. Con $u = 1 + x^2$: $\frac{1}{2}\int u^{-1/2} du = \sqrt{u} + C = \sqrt{1+x^2} + C$.

Solución del ejercicio 3

Planteamiento. Usamos $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Elegimos como u la función que se simplifica al derivar (logaritmos y polinomios) y como dv la que es fácil de integrar; si queda otro producto, repetimos el proceso.

a. $u = x$, $dv = e^x dx$: $xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$.
b. $u = \ln x$, $dv = x\,dx$: $\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.
c. Dos veces: $u = x^2$, $dv = \sin x\,dx$ da $-x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$; y de nuevo $\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x$. Resultado: $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$.

Solución del ejercicio 4

Planteamiento. Si el denominador se factoriza en factores lineales distintos, descomponemos la fracción en suma de fracciones simples $\frac{A}{x-a}$. Calculamos los coeficientes dando valores a x o igualando coeficientes, e integramos cada término

como un logaritmo.

a. $\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$. Entonces $\square$.
b. $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ y $\frac{x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{4/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2}$. Integral: $\frac{4}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C$.
c. El numerador es la derivada del denominador, de modo que la integral es $\ln|x^2+x-2| + C$.

Solución del ejercicio 5

Planteamiento. La regla de Barrow calcula la integral definida evaluando una primitiva en los extremos y restando. El teorema fundamental del cálculo dice además que la derivada de una función integral es el integrando evaluado en el límite superior.

a. $\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$.
b. Por partes, $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$. Entonces $[x\ln x - x]_1^e = (e-e) - (0-1) = 1$.
c. Teorema fundamental: $G'(x) = e^{-x^2}$, luego $G'(1) = e^{-1} \approx 0{,}368$.

Solución del ejercicio 6

Planteamiento. Para el área entre dos curvas hallamos primero los puntos de corte, que son los límites de integración. Después averiguamos qué curva está por encima en ese intervalo e integramos la diferencia «función superior menos función inferior».

a. $x^2 = x+2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1$ o $x = 2$.
b. En $x = 0$: $x + 2 = 2 > 0 = x^2$, así que la recta está por encima.
c. $A = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{9}{2}$.

Solución del ejercicio 7

Planteamiento. El caudal es la rapidez con que entra el agua, así que el volumen que entra en un intervalo de tiempo es la integral del caudal. Derivamos para estudiar el máximo del caudal e integramos para obtener el volumen total.

a. $q(0) = 6$ m³/h y $q(10) = 6 + 20 - 10 = 16$ m³/h.
b. $q'(t) = 2 - 0{,}2t = 0 \Rightarrow t = 10$. Como $q' > 0$ antes, el máximo en $[0, 10]$ está en $t = 10$: 16 m³/h.
c. $V = \int_0^{10}(6 + 2t - 0{,}1t^2)\,dt = \left[6t + t^2 - \frac{0{,}1t^3}{3}\right]_0^{10} = 60 + 100 - \frac{100}{3} = \frac{380}{3} \approx 126{,}7$ m³.
d. No: $126{,}7$, faltan unos $23{,}3$ m³; se llenaría después de las 18:00.

Solución del ejercicio 8

Planteamiento. La integral de la velocidad da el desplazamiento, en el que los tramos hacia atrás restan. Para la distancia recorrida integramos el valor absoluto de la velocidad, dividiendo el intervalo en los instantes en que la velocidad cambia de signo.

a. $3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) = 0 \Rightarrow t = 1$ o $t = 3$.
b. $\int_0^4 v\,dt = \left[t^3 - 6t^2 + 9t\right]_0^4 = 64 - 96 + 36 = 4$ hm.
c. $v > 0$ en $(0,1)$ y $(3,4)$, v en $(1,3)$. Integrales: $\int_0^1 v = 4$, $\int_1^3 v = 0 - 4 = -4$, $\int_3^4 v = 4 - 0 = 4$. Distancia: $4 + 4 + 4 = 12$ hm.
d. El desplazamiento suma con signo (lo que retrocede resta), mientras que la distancia suma valores absolutos.

Solución del ejercicio 9

Planteamiento. El coste marginal es la derivada del coste total, de modo que integrándolo se recupera el coste. La integral entre dos producciones da el coste de pasar de una a otra, y el coste fijo aparece como constante de integración.

a. $C'(50) = 40 - 10 = 30$ y $C'(100) = 40 - 20 = 20$ céntimos por barra.
b. $\int_0^{100} (40 - 0{,}2x)\,dx = \left[40x - 0{,}1x^2\right]_0^{100} = 4000 - 1000 = 3000$ céntimos, o sea 30 €.
c. $\left[40x - 0{,}1x^2\right]_{50}^{100} = 3000 - (2000 - 250) = 1250$ céntimos.
d. $C(x) = 500 + 40x - 0{,}1x^2$ (céntimos). Comprobación: $C(100) = 500 + 3000 = 3500$.

Solución del ejercicio 10

Planteamiento. El valor medio de una función continua en $[a,b]$ es $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$. Evaluamos la temperatura en los instantes indicados, integramos el término sinusoidal con un cambio de variable y dividimos entre la duración del intervalo.

a. $T(8) = 15$, $T(14) = 15 + 10\sin\frac{\pi}{2} = 25$ y $T(20) = 15 + 10\sin\pi = 15$.
b. $\int_8^{20} 15\,dt = 180$ y $\int_8^{20} 10\sin\frac{\pi(t-8)}{12}dt = 10\cdot\frac{12}{\pi}\left[-\cos u\right]_0^{\pi} = \frac{240}{\pi}$. Total: $180 + \frac{240}{\pi} \approx 256{,}4$.
c. °C.
d. Sí, 21,4 > 15. Se alcanza cuando $\sin\frac{\pi(t-8)}{12} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$, es decir $t - 8 \approx 2{,}64$ h (hacia las 10:38) y también en $t - 8 \approx 9{,}36$ h (hacia las 17:22).

Solución del ejercicio 11

Planteamiento. El trabajo de una fuerza variable a lo largo de un desplazamiento es la integral de la fuerza respecto de la posición. Con la ley de Hooke, $F(x) = kx$, el

trabajo es $\frac{k}{2}x^2$ evaluado entre las posiciones inicial y final.

a. $F(0{,}05) = 200 \cdot 0{,}05 = 10$ N.
b. $W = \left[100x^2\right]_0^{0{,}1} = 100 \cdot 0{,}01 = 1$ J.
c. $W = \left[100x^2\right]_{0{,}1}^{0{,}2} = 100(0{,}04 - 0{,}01) = 3$ J.
d. El trabajo crece como x^2 y $0{,}2^2 - 0{,}1^2 = 3 \cdot 0{,}1^2$: al estar más estirado, el muelle ejerce más fuerza y cada centímetro cuesta más energía.

Solución del ejercicio 12

Planteamiento. Al girar la curva alrededor del eje x, cada sección es un círculo de radio $f(x)$. Sumamos los volúmenes de esos discos con la integral $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$ y pasamos el resultado a las unidades pedidas.

a. Cada sección perpendicular al eje es un círculo de radio $f(x)$ y área $\pi f(x)^2$; integramos esas áreas.
b. $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi \approx 25{,}1$ dm³.
c. Son aproximadamente 25,1 L (una copa muy grande, de exposición).
d. $\pi\frac{h^2}{2} = 4\pi \Rightarrow h^2 = 8 \Rightarrow h = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ dm.

Solución del ejercicio 13

Planteamiento. El punto de equilibrio se obtiene igualando oferta y demanda. Los excedentes son áreas entre la curva correspondiente y la recta horizontal del precio de equilibrio, y se calculan con integrales definidas entre 0 y la cantidad de equilibrio.

a. $50 - 0{,}5x = 10 + 0{,}5x \Rightarrow x_0 = 40$, $p_0 = 30$ €.
b. $\int_0^{40} (20 - 0{,}5x)\,dx = [20x - 0{,}25x^2]_0^{40} = 800 - 400 = 400$ €.
c. $\int_0^{40} (20 - 0{,}5x)\,dx = 400$ € (la figura es simétrica).
d. El excedente del consumidor es el ahorro total de quienes estaban dispuestos a pagar más de 30 €; el del productor, el beneficio extra de quienes habrían vendido por menos.

Solución del ejercicio 14

Planteamiento. El ritmo de crecimiento es la derivada de la población, así que el aumento entre dos años es la integral del ritmo. Integramos la exponencial, sumamos la población inicial para obtener $P(t)$ y comprobamos derivando.

a. $r(0) = 3$ y $r(10) = 3e^{0{,}3} \approx 4{,}05$ mil por año.
b. $\int_0^{10} 3e^{0{,}03t} dt = \left[100e^{0{,}03t}\right]_0^{10} = 100(e^{0{,}3} - 1) \approx 34{,}99$ mil habitantes.
c. $P(t) = P(0) + \int_0^t r = 100 + 100(e^{0{,}03t} - 1) = 100e^{0{,}03t}$, así que $P(10) \approx 134{,}99$ mil.

d. $P'(t) = 100 \cdot 0{,}03\, e^{0{,}03t} = 3e^{0{,}03t} = r(t)$.

Solución del ejercicio 15

Planteamiento. Sin la ecuación del borde, aproximamos el área con los datos tabulados. Aplicamos las fórmulas de los trapecios y de Simpson con el paso h de la tabla, comparamos los resultados y usamos el más preciso para la estimación final.

a. $h = 10$: $A \approx 10\left[\frac{12+9}{2} + 18 + 21 + 16\right] = 10 \cdot (10{,}5 + 55) = 655$ m².
b. $A \approx \frac{10}{3}(12 + 72 + 42 + 64 + 9) = \frac{10}{3} \cdot 199 = 663{,}3$ m².
c. Simpson supera en unos 8 m² a los trapecios (1,2 %). Los trapecios sustituyen la curva por segmentos; Simpson la aproxima por parábolas y suele ser más precisa.
d. $663{,}3/36 \approx 18{,}4$: caben unos 18 olivos.

Solución del ejercicio 16

Planteamiento. Una integral impropia se define como el límite de integrales en intervalos acotados. Calculamos la primitiva, la evaluamos entre 0 y b y estudiamos el límite cuando $b \to \infty$: si es finito, la integral converge.

a. $\int_0^b 5e^{-t/5}dt = 25(1 - e^{-b/5}) \to 25$ mg·h/L.
b. A las 10 h: $25(1 - e^{-2}) \approx 21{,}6$, es decir, el $86{,}5$ % del total.
c. $\int_1^b x^{-2}dx = 1 - \frac{1}{b} \to 1$ (converge). $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b \to \infty$ (diverge).
d. $\int_a^1 x^{-1/2}dx = 2 - 2\sqrt{a} \to 2$ cuando $a \to 0^+$: converge a 2.

Solución del ejercicio 17

Planteamiento. Al girar alrededor del eje vertical comparamos dos métodos: el de los discos, integrando en y, y el de las capas cilíndricas, $V = 2\pi \int x f(x)\, dx$. Ambos deben dar el mismo volumen, lo que sirve de comprobación.

a. Cada disco tiene radio $x = \sqrt{y}$ y área πy: $V = \pi \int_0^4 y\, dy = \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$.
b. $V = 2\pi \int_0^2 (4x - x^3)\, dx = 2\pi\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$.
c. Los dos valen $8\pi \approx 25{,}13$ dm³: los métodos son equivalentes.
d. Caben unos 25,1 litros.

Solución del ejercicio 18

Planteamiento. La función área acumulada $F(x) = \int_0^x f$ tiene derivada f, por el teorema fundamental. Estudiamos el signo de f para saber cuándo crece o decrece el stock y calculamos F en los puntos clave con la regla de Barrow.

a. $G(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$.
b. $G'(x) = f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, con ceros $x = 1$ y $x = 3$.
c. $G' > 0$ para x, en $(1, 3)$ y > 0 después: máximo local en $x = 1$ con $G(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}$; mínimo local en $x = 3$ con $G(3) = 9 - 18 + 9 = 0$.
d. El stock acumulado alcanza un máximo relativo de $\frac{4}{3}$ toneladas en la semana 1 y baja hasta volver a 0 en la semana 3, donde empieza a crecer de nuevo.

Solución del ejercicio 19

Planteamiento. Calculamos la integral de la función en el intervalo, la dividimos entre su longitud para obtener el valor medio y resolvemos $f(c) = \bar{f}$ para encontrar el instante en que la función toma exactamente ese valor medio.

a. $\frac{1}{3}\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3$. Entonces $c^2 = 3$ y $c = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.
b. $\int_0^6 (2 + t - 0{,}1t^2)\,dt = \left[2t + \frac{t^2}{2} - \frac{0{,}1t^3}{3}\right]_0^6 = 12 + 18 - 7{,}2 = 22{,}8$ kWh.
c. $22{,}8/6 = 3{,}8$ kW.
d. $2 + t - 0{,}1t^2 = 3{,}8 \iff 0{,}1t^2 - t + 1{,}8 = 0 \iff t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0{,}72}}{0{,}2}$; resulta $t \approx 2{,}35$ h y $t \approx 7{,}65$ h. Solo la primera está en $[0, 6]$.

Solución del ejercicio 20

Planteamiento. Cada integral exige una técnica distinta: partes dos veces con una ecuación para la exponencial por el seno, la fórmula del ángulo doble para el seno al cuadrado y una interpretación geométrica (un cuarto de círculo) para la raíz.

a. Por partes dos veces: $I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$, de donde $I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$.
b. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, luego $\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.
c. Con $x = \sin\theta$: $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4}$. Es el área de un cuarto de círculo de radio 1.