Ejercicios - Inferencia estadística

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Distribución de la media muestral

La estatura de los estudiantes de una universidad de Madrid es normal con media 170 cm y desviación típica 10 cm. Se toman muestras aleatorias de 25 estudiantes.

a. ¿Qué distribución sigue la media muestral $\bar{X}$?
b. Calcula $P(\bar{X} > 174)$.
c. Calcula $P(166$.
d. Compara con la probabilidad de que un solo estudiante mida más de 174 cm y explica la diferencia.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Distribución de la proporción muestral

El 40 % de los usuarios de una red de bibliotecas de Barcelona lee libros electrónicos. Se encuesta a 100 usuarios al azar.

a. ¿Qué distribución aproximada sigue la proporción muestral $\hat{p}$? Comprueba las condiciones.
b. Calcula su desviación típica.
c. Calcula la probabilidad de que en la muestra la proporción supere el 50 %.
d. ¿Y la de que esté entre el 35 % y el 45 %?

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Intervalo de confianza para la media

En una muestra de 36 envases de aceite de una almazara de Jaén, la media del contenido es 52 cl. Se sabe que la desviación típica poblacional es 6 cl.

a. Calcula el error estándar de la media.
b. Construye el intervalo de confianza al 95 %.
c. Construye el intervalo al 99 % ($z = 2{,}576$) y compara las amplitudes.
d. Interpreta correctamente el intervalo al 95 %.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – ¿Cuántos datos hacen falta?

Con los envases del ejercicio anterior ($\sigma = 6$ cl), la almazara quiere estimar la media con un error máximo E al 95 % de confianza.

a. Despeja n de la fórmula $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
b. Calcula n para $E = 1$ cl.
c. Calcula n para $E = 0{,}5$ cl.
d. ¿Qué ocurre con el tamaño al reducir el error a la mitad?

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Intervalo de confianza para una proporción

En una muestra de 600 hogares de Andalucía, 240 tienen placas solares o piensan instalarlas este año.

a. Calcula la proporción muestral.
b. Calcula el error estándar estimado.
c. Construye el intervalo de confianza al 95 %.
d. ¿Se puede afirmar con esa confianza que menos de la mitad de los hogares está en esa situación?

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Contraste bilateral para la media

Una máquina de una empresa de Valencia debería llenar paquetes de 500 g con $\sigma = 12$ g. En una muestra de 36 paquetes, la media es 496 g.

a. Plantea las hipótesis.
b. Calcula el estadístico de contraste.
c. Decide al 5 % y al 1 % de significación.
d. Calcula el p-valor e interprétalo.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Una encuesta electoral

Un instituto de opinión de Madrid entrevista a 1200 personas antes de unas elecciones autonómicas; 456 dicen que votarán al partido A.

a. Calcula la estimación puntual del porcentaje de voto.
b. Calcula el intervalo de confianza al 95 %.
c. ¿Cuántas personas habría que entrevistar para un margen de error del 3 % en el peor caso ($p = 0{,}5$)?
d. Un periódico titula «El partido A tendrá un 38 % de los votos». ¿Qué le falta a ese titular?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Control de los paquetes de café

Una asociación de consumidores sospecha que los paquetes de café de 250 g de una marca vendida en supermercados pesan de media menos. Se pesan 50 paquetes: la media es 248,5 g. Se sabe que $\sigma = 5$ g.

a. Plantea las hipótesis (contraste unilateral).
b. Calcula el estadístico.
c. Calcula el p-valor.
d. ¿Qué decide al 5 %? ¿Y al 1 %? Redacta la conclusión.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La espera en urgencias

En el servicio de urgencias de un hospital de Zaragoza se mide el tiempo de espera de 64 pacientes: la media es 85 minutos y la desviación típica muestral 15 minutos.

a. ¿Por qué se puede usar la normal aunque no se conozca la distribución de los tiempos?
b. Construye el intervalo de confianza al 99 % para la espera media.
c. La consejería se marca el objetivo de una espera media inferior a 90 minutos. ¿Se cumple con un 99 % de confianza?
d. ¿Qué tamaño de muestra permitiría un error de 3 minutos al 99 %?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Un nuevo método de enseñanza

En una asignatura de una universidad de Murcia aprueba tradicionalmente el 60 % del alumnado. Este curso se prueba un nuevo método con 200 estudiantes, de los que aprueban 135.

a. Plantea un contraste para decidir si el método aumenta la proporción de aprobados.
b. Calcula el estadístico (con el error estándar bajo H_0).
c. Decide al 5 % y calcula el p-valor.
d. ¿Demuestra esto que el método es mejor? Comenta posibles problemas del estudio.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Errores de tipo I y II en una fábrica

Una fábrica de tornillos de Eibar controla el diámetro, que debe ser de 10 mm con $\sigma = 0{,}2$ mm. Cada hora mide 16 tornillos y contrasta $H_0 : \mu = 10$ frente a $H_1 : \mu \neq 10$ al 5 %.

a. Explica qué son en este contexto el error de tipo I y el de tipo II.
b. Calcula la región de aceptación para $\bar{X}$.
c. Si en realidad $\mu = 10{,}1$, calcula la probabilidad β de no detectarlo.
d. ¿Cómo podría la fábrica reducir β sin aumentar α?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Comparar dos abonos

Una cooperativa agrícola de La Rioja compara dos abonos. Con el abono A, 40 parcelas dan una producción media de 32 kg con $\sigma_1 = 4$ kg; con el B, 50 parcelas dan 30 kg con $\sigma_2 = 5$ kg.

a. Calcula el error estándar de la diferencia de medias.
b. Contrasta al 5 % si las producciones medias son iguales.
c. Construye el intervalo de confianza al 95 % para $\mu_1 - \mu_2$.
d. ¿Qué recomendarías a la cooperativa?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Una muestra pequeña: la t de Student

Un laboratorio de una empresa tecnológica de Málaga mide la autonomía de 9 baterías de un prototipo de patinete: media 12,2 h y desviación típica muestral 0,6 h. Se supone que la autonomía es normal.

a. ¿Por qué hay que usar la distribución t de Student?
b. ¿Cuántos grados de libertad tiene? El valor crítico al 95 % es $t_{8;\,0{,}025} = 2{,}306$.
c. Construye el intervalo de confianza al 95 %.
d. Compara con el intervalo que se obtendría (incorrectamente) usando 1,96.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – ¿Está trucado el dado?

En un club de juegos de mesa de Vigo se lanza 120 veces un dado y se obtienen las frecuencias de la tabla.

Cara	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	15	22	18	25	17	23

a. Plantea las hipótesis.
b. Calcula las frecuencias esperadas y el estadístico $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$.
c. Con 5 grados de libertad, el valor crítico al 5 % es 11,07. Decide.
d. ¿Por qué hay 5 grados de libertad y no 6?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: el teletrabajo en las empresas

Un estudio de la Cámara de Comercio de Valencia encuesta a 800 trabajadores elegidos al azar; 280 teletrabajan al menos un día a la semana. Un sindicato afirma que «ya son más de un tercio» y la patronal que «no llegan al 30 %». Se quiere un informe con base estadística.

a. Calcula la proporción muestral y su error estándar.
b. Construye el intervalo de confianza al 95 %.
c. ¿Qué afirmación es compatible con los datos? Razona con el intervalo.
d. Contrasta al 5 % la afirmación del sindicato planteando $H_1 : p > \frac{1}{3}$.
e. ¿Qué tamaño de muestra daría un margen de error del 2 %?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: el consumo de un coche

Un fabricante anuncia que un modelo de coche consume 5 L/100 km. Una revista del motor mide el consumo de 40 coches en condiciones reales y obtiene una media de 5,3 L/100 km con desviación típica muestral 0,8 L/100 km. Quiere saber si el consumo real es mayor que el anunciado.

a. Plantea las hipótesis.
b. Calcula el estadístico de contraste.
c. Calcula el p-valor.
d. Decide al 5 % y al 1 %.
e. Redacta la conclusión para el artículo, indicando también un intervalo al 95 % del consumo medio.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: intervalos y contrastes

Un equipo de investigación de Santiago de Compostela obtiene para la media de una variable el intervalo de confianza al 95 % $[12{,}4;\ 15{,}8]$ con una muestra grande.

a. ¿Cuál es la media muestral y el margen de error?
b. Sin hacer cuentas, ¿se rechazaría $H_0 : \mu = 12$ frente a $H_1 : \mu \neq 12$ al 5 %? ¿Y $H_0 : \mu = 15$?
c. Calcula el error estándar.
d. Con ese error estándar, calcula el p-valor del contraste de $H_0 : \mu = 12$.
e. Explica la relación general entre intervalos y contrastes bilaterales.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: ¿depende el uso de la biblioteca de la rama?

La biblioteca de una universidad de Alicante pregunta a 100 estudiantes de Ciencias y 100 de Letras si la usan al menos una vez por semana. Los resultados están en la tabla. Se quiere saber si el uso depende de la rama.

	Usa la biblioteca	No la usa	Total
Ciencias	60	40	100
Letras	45	55	100
Total	105	95	200

a. Plantea las hipótesis.
b. Calcula las frecuencias esperadas bajo independencia.
c. Calcula el estadístico χ^2.
d. Con 1 grado de libertad el valor crítico al 5 % es 3,841. Decide.
e. Calcula las proporciones de uso en cada rama e interpreta.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: buenos y malos estimadores

Para estimar la media μ de una población con varianza σ^2 a partir de una muestra X_1, X_2, X_3, un estudiante propone $T_1 = \bar{X}$ y otro $T_2 = \frac{X_1+2X_2+X_3}{4}$.

a. Demuestra que ambos son insesgados.
b. Calcula la varianza de cada uno.
c. ¿Cuál es más eficiente? Justifica.
d. Explica por qué la cuasivarianza $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2$ se prefiere a la varianza muestral como estimador de σ^2.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: fórmulas de tamaño muestral

Deduce y analiza las fórmulas que se usan para planificar encuestas.

a. Despeja n en $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.
b. Demuestra que $p(1-p) \le \frac{1}{4}$ y deduce la fórmula del peor caso.
c. Calcula n para $E = 0{,}01$ al 95 %.
d. Si la población tiene solo 2000 personas, la corrección $n' = \frac{n}{1+(n-1)/N}$ reduce el tamaño. Calcúlalo con el n del apartado c).