Soluciones del examen - Espacios vectoriales

Curso: Universidad 1 · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (3 puntos)

Criterios. Se valora comprobar las condiciones de subespacio o dar un contraejemplo concreto.

a. Sí: definido por ecuaciones lineales homogéneas; es la recta $\langle(2,1,0)\rangle$. Contiene al vector nulo y es cerrado para sumas y productos por escalares, porque las ecuaciones son lineales y homogéneas. Sus vectores son $(2y, y, 0) = y(2,1,0)$: dimensión 1.
b. No: $(1,0,0) \in B$ pero $-1 \cdot (1,0,0) \notin B$. Falla la cerradura respecto del producto por escalares negativos. Sí es cerrado para la suma, pero eso no basta: es un semiespacio, no un subespacio.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

Criterios. Se valora el cálculo del determinante con el parámetro y la relación de dependencia explícita.

a. Desarrollando por la primera fila: [redacted]. Son dependientes solo si $k = 2$. Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si y solo si el determinante de la matriz que forman es cero. Para $k \neq 2$ son independientes y forman una base.
b. Con $k = 2$, $w = (1,2,1)$ y $\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) = (1,2,1)$ da $\alpha = 1$, $\beta = 1$: $w = u + v$. Comprobación: $u + v = (1,1,0) + (0,1,1) = (1,2,1)$.

Solución del ejercicio 3 (5 puntos)

Criterios. Se valora el cálculo del rango, la base, las ecuaciones implícitas y la comprobación de pertenencia.

a. $(2,4,1,3) = 2(1,2,0,1) + (0,0,1,1)$: el rango es 2. Base $\{(1,2,0,1), (0,0,1,1)\}$, $\dim U = 2$. Los vectores $(1,2,0,1)$ y $(0,0,1,1)$ no son proporcionales, así que son independientes.
b. $x = \lambda$, $y = 2\lambda$, $z = \mu$, $t = \lambda + \mu$: $y - 2x = 0$ y $t - x - z = 0$. Se eliminan los parámetros λ y μ; hacen falta $4 - 2 = 2$ ecuaciones.
c. $2 - 2 = 0$ y $4 - 1 - 3 = 0$: sí, es $(1,2,0,1) + 3(0,0,1,1)$. Basta comprobar que el vector cumple las dos ecuaciones implícitas.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

Criterios. Se valora justificar que es base y resolver el sistema de coordenadas con orden.

a. $\det = 2 \neq 0$. . Tres vectores independientes en un espacio de dimensión 3 forman una base.
b. $\alpha + \gamma = 2$, $\alpha + \beta = 3$, $\beta + \gamma = 1$: sumando, $\alpha + \beta + \gamma = 3$, así que $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$. Planteamos $\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1) = (2,3,1)$. Restando cada ecuación de la suma total: $\beta = 3 - 2 = 1$, $\gamma = 3 - 3 = 0$, $\alpha = 3 - 1 = 2$. Comprobación: $2(1,1,0) + (0,1,1) = (2,3,1)$.
c. $(1,1,0) - (0,1,1) + 2(1,0,1) = (3,0,1)$. Las coordenadas son los coeficientes de la combinación lineal: se multiplica cada vector de la base por su coordenada y se suman.

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

Criterios. Se valora el rango de los generadores, la fórmula de Grassmann y el vector común.

a. $(1,0,0,1) + (0,1,1,0) = (1,1,1,1) = (1,1,0,0) + (0,0,1,1)$ y el rango de los cuatro vectores es 3: $\dim(U+W) = 3$. $U+W$ está generado por los cuatro vectores juntos. Hay una relación de dependencia y tres de ellos, $(1,0,0,1)$, $(0,1,1,0)$ y $(1,1,0,0)$, son independientes, así que el rango es 3.
b. $2 + 2 - 3 = 1$. Fórmula de Grassmann: $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$, con $\dim U = \dim W = 2$ porque cada uno tiene dos generadores no proporcionales.
c. $\{(1,1,1,1)\}$. El vector $(1,1,1,1)$ está en U (suma de sus generadores) y en W (suma de los suyos); como $\dim(U \cap W) = 1$, él solo forma una base.