Apuntes - Espacios vectoriales

Curso: Universidad 1

Un espacio vectorial es la estructura donde se pueden sumar vectores y multiplicarlos por escalares respetando unas reglas. Contiene como casos particulares los vectores de $\mathbb{R}^n$, las matrices, los polinomios y las funciones, y por eso es la base de toda el álgebra lineal. Aquí trabajamos sobre $\mathbb{R}$.

Actividad de introducción

Un estudio de sonido de Madrid graba una canción en varias pistas: voz, guitarra, bajo y batería. La mezcla final es una suma de las pistas, cada una multiplicada por un volumen. Si la ingeniera de sonido quiere reproducir una mezcla concreta, se pregunta si es posible con esas pistas y si hay una sola manera de hacerlo. ¿Y si dos pistas son en realidad la misma grabación con distinto volumen? Entonces una de ellas sobra. Estas preguntas, que también aparecen con colores, señales, polinomios o soluciones de ecuaciones, tienen una estructura común: sumar objetos y multiplicarlos por números. Esa estructura es la de espacio vectorial, y sus ideas centrales son la combinación lineal, la independencia, la base y la dimensión.

Definición y subespacios

Definición: definición y subespacios

Un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto V con una suma y un producto por escalares que cumplen las propiedades usuales: asociatividad, conmutatividad, existencia del vector nulo y del opuesto, distributividad y $1 \cdot v = v$. Un **subespacio** $W \subseteq V$ es un subconjunto que es espacio vectorial con las mismas operaciones. Para comprobarlo basta ver que (1) $0 \in W$, (2) si $u, w \in W$ entonces $u + w \in W$, (3) si $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda w \in W$. Los conjuntos definidos por ecuaciones lineales homogéneas son subespacios: $x + y + z = 0$ lo es; $xy = 0$ no (suma de $(1,0)$ y $(0,1)$ sale fuera).

Independencia, generadores y bases

Definición: independencia, generadores y bases

Los vectores $v_1, \ldots, v_k$ son **linealmente independientes** si $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$ solo ocurre con todos los $\lambda_i = 0$. Generan V si todo vector es combinación lineal de ellos. Una **base** es un conjunto independiente que genera V; todas las bases de V tienen el mismo número de vectores, la **dimensión** $\dim V$. Por ejemplo $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$ (base $1, x, x^2$) y $\dim M_{2\times 2} = 4$. En un espacio de dimensión n, n vectores independientes forman una base y n generadores también.

Propiedad

Para decidir si k vectores de $\mathbb{R}^n$ son independientes se colocan como filas (o columnas) de una matriz y se calcula el rango: son independientes si y solo si el rango es k. Con n vectores de $\mathbb{R}^n$, equivale a que el determinante sea no nulo.

Coordenadas y cambio de base

Propiedad

Si $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ es base, cada vector se escribe de forma única $v = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$ y $(x_1, \ldots, x_n)$ son sus **coordenadas**. Si P es la matriz cuyas columnas son los vectores de B escritos en la base canónica, entonces $v = P\,[v]_B$, es decir $[v]_B = P^{-1} v$.

Suma e intersección de subespacios

Definición: suma e intersección de subespacios

Dados subespacios U, W, la intersección $U \cap W$ y la suma $U + W = \{u + w\}$ son subespacios, y se cumple la **fórmula de Grassmann**: $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$. Para obtenerlos, se resuelven las ecuaciones de ambos (intersección) o se juntan los generadores (suma). La suma es **directa** si $U \cap W = \{0\}$.

Método: decidir si son base

1. Escribe los vectores como filas de una matriz.
2. Calcula el rango o el determinante.
3. Compara con la dimensión del espacio.
4. Si el número de vectores es la dimensión y son independientes, son base.

Ejemplo 1

El subespacio $W = \{x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ tiene dimensión 2: $z = -x - y$, luego $(x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$.

Ejemplo 2

Los vectores $(1, 2, 3), (0, 1, 4), (5, 6, 0)$ tienen determinante 1, así que forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3

Con $U=\{x=y\}$ y $V=\{y=z\}$ en $\mathbb{R}^3$: $U\cap V=\{x=y=z\}$ tiene dimensión 1, y $\dim(U+V)=2+2-1=3$, luego $U+V=\mathbb{R}^3$.

¡Atención!

Olvidar comprobar que el vector nulo pertenece al subconjunto; creer que cualquier conjunto de n vectores es base de un espacio de dimensión n (deben ser independientes); confundir coordenadas con los vectores base; usar mal la fórmula de Grassmann, que no vale para tres subespacios.

Herramientas prácticas

Método: estudiar un sistema de vectores de $\mathbb{R}^n$

1. Escribe los vectores como columnas (o filas) de una matriz.
2. Calcula el rango por Gauss o con menores.
3. Si el rango es igual al número de vectores, son linealmente independientes.
4. Si el rango es igual a n, generan $\mathbb{R}^n$; si se cumplen las dos cosas, son base.
5. Si son dependientes, las columnas sin pivote son combinación de las anteriores: la forma escalonada reducida da los coeficientes.

Método: pasar de paramétricas a implícitas

1. Escribe los generadores de U como columnas junto a un vector genérico $(x_1,\dots,x_n)$.
2. Impón que el vector genérico sea combinación de los generadores: la matriz ampliada debe tener el mismo rango que la de los generadores.
3. Cada menor orlado que debe anularse da una ecuación implícita.
4. El número de ecuaciones independientes es $n-\dim U$.

Teorema: fórmula de Grassmann

Si U y W son subespacios de dimensión finita, $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$. En particular, la suma es directa, $U\oplus W$, exactamente cuando $U\cap W=\{0\}$, y entonces cada vector de $U+W$ se escribe de una única forma como suma de uno de U y uno de W.

Ejemplo 4

¿Forman base de $\mathcal{P}_2$ los polinomios $1+x$, $x+x^2$ y $1+x^2$?

Sus coordenadas en la base $\{1,x,x^2\}$ son $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,0,1)$. El determinante vale $2\neq 0$, así que son independientes; como $\dim\mathcal{P}_2=3$, forman base.

Ejemplo 5

Halla la dimensión de $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \ \operatorname{tr} A = 0\}$.

Una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ está en U si $d = -a$. Quedan tres parámetros libres a, b, c, y una base es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_{12}, E_{21} \right\}$: $\dim U = 3$.

Ejemplo 6

En una tienda de Logroño, cada cesta de compra se describe por el vector (kg de fruta, kg de verdura, litros de aceite). Las cestas tipo son $c_1 = (2, 1, 0)$, $c_2 = (0, 2, 1)$ y $c_3 = (2, 5, 2)$. ¿Hay alguna cesta tipo que sobre?

$c_3 = c_1 + 2c_2$, así que es combinación de las otras dos: el subespacio generado tiene dimensión 2 y c_3 no aporta nada nuevo. Con c_1 y c_2 se obtienen las mismas combinaciones.

Propiedad: cambio de base

Si P es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de una base B respecto de otra base C, entonces las coordenadas de un vector cumplen $v_C = P v_B$ y, como P siempre es invertible, $v_B = P^{-1} v_C$. Los cambios de base se componen multiplicando matrices: para pasar de B a D pasando por C se usa $P_{C \to D} P_{B \to C}$. Cuando la base nueva es ortonormal, la inversa coincide con la traspuesta y las coordenadas se calculan con simples productos escalares, sin resolver ningún sistema. Esta propiedad explica por qué en la práctica se prefieren las bases ortonormales: los cálculos son más rápidos y los errores de redondeo no se amplifican. En los programas de gráficos por ordenador, cada objeto tiene su propio sistema de referencia, y dibujar la escena completa exige encadenar varios cambios de base, uno por cada objeto, cámara o luz, multiplicando las matrices correspondientes.

Por qué importan las bases

Una base es a la vez un sistema generador mínimo y un sistema independiente máximo: no sobra ni falta ningún vector. Gracias a ella, cada vector de un espacio de dimensión n se identifica con una lista de n números, sus coordenadas, y cualquier problema se traduce a cálculos con matrices. Elegir bien la base simplifica enormemente los problemas: la base de Taylor describe el comportamiento de un polinomio cerca de un punto, la de Lagrange resuelve de inmediato la interpolación y las bases ortogonales, como la de Haar o la de Fourier, permiten calcular coordenadas con productos escalares y comprimir señales eliminando las componentes pequeñas. Así funcionan los formatos de compresión de audio e imagen que usamos a diario. La dimensión, por su parte, mide los grados de libertad: el número de parámetros independientes que describen los elementos de un subespacio, las soluciones de un sistema homogéneo o las de una ecuación

diferencial lineal. El teorema de la dimensión garantiza que todas las bases de un espacio tienen el mismo número de vectores, de modo que la dimensión es una propiedad del espacio y no de la base elegida. Por eso se pueden comparar espacios muy distintos, como $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{P}_3$ o $M_2(\mathbb{R})$: todos tienen dimensión 4 y, a efectos del álgebra lineal, se comportan igual.

¡Atención!

Un conjunto definido por una ecuación no homogénea, como $x + y = 1$, nunca es subespacio, porque no contiene el vector nulo. La unión de dos subespacios no suele ser subespacio: la suma $U + W$ es el menor subespacio que los contiene. Y para comprobar que n vectores son base de un espacio de dimensión n basta ver que son independientes, o bien que generan: no hace falta comprobar las dos cosas.

¿Sabías que?

El concepto abstracto de espacio vectorial lo formuló Giuseppe Peano en 1888, aunque Hermann Grassmann había desarrollado las ideas de dimensión y de suma de subespacios en 1844, en un libro tan adelantado a su tiempo que casi nadie lo entendió. Hoy los buscadores de internet representan cada documento como un vector de miles de dimensiones, y miden el parecido entre dos textos calculando el ángulo entre sus vectores: cuanto menor es el ángulo, más se parecen.

El consejo de Otto

para saber si un conjunto es subespacio, comprueba primero si contiene al vector cero. Si no lo contiene, ya has terminado.