Ejercicios - Espacios vectoriales

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – ¿Es un subespacio vectorial?

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial es subespacio si es cerrado para la suma y para el producto por escalares (equivalentemente, si $\lambda u + \mu v \in W$ para todo $u, v \in W$). Decide en cada caso.

a. $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + 2y - z = 0\}$
b. $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y = 1\}$
c. $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 0\}$
d. $W_4 = \{p \in \mathcal{P}_2 : \ p(1) = 0\}$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Combinaciones lineales

Sean $v_1 = (1, 1, 1)$ y $v_2 = (0, 1, 2)$ en $\mathbb{R}^3$.

a. ¿Es $w = (1, 4, 7)$ combinación lineal de v_1 y v_2? En caso afirmativo, halla los coeficientes.
b. ¿Lo es $u = (1, 0, 0)$?
c. Describe $\langle v_1, v_2 \rangle$ con una ecuación implícita.
d. Comprueba que w cumple esa ecuación y u no.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Dependencia e independencia lineal

Recuerda: $v_1, \ldots, v_k$ son linealmente independientes si la única combinación nula es la trivial; en $\mathbb{R}^n$ basta estudiar el rango de la matriz que los tiene por columnas.

a. Estudia si $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 0)$ y $(3, 3, 3)$ son independientes. Si no lo son, halla una relación.
b. ¿Para qué valores de k son dependientes $(1, 1, k)$, $(1, k, 1)$ y $(k, 1, 1)$?
c. Para $k = -2$, escribe una relación de dependencia.
d. ¿Pueden ser independientes 4 vectores de $\mathbb{R}^3$? Justifica.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Base y dimensión de un subespacio

Sea $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + z + t = 0, \ x - y = 0\}$.

a. Calcula la dimensión de U.
b. Resuelve el sistema en forma paramétrica y da una base de U.
c. Comprueba que los vectores de la base cumplen las dos ecuaciones.
d. Completa la base de U hasta obtener una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – De generadores a ecuaciones implícitas

Sea $V = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$ y $W = \langle (1, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 1) \rangle \subset \mathbb{R}^4$.

a. Escribe unas ecuaciones paramétricas de V.
b. Elimina los parámetros para obtener su ecuación implícita.
c. ¿Cuántas ecuaciones implícitas necesita W? Obténlas.
d. ¿Pertenece $(2, 3, 1, 3)$ a W?

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Coordenadas y cambio de base

En $\mathbb{R}^2$ se consideran la base canónica C y la base $B = \{u_1, u_2\}$ con $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, -1)$.

a. Halla las coordenadas de $v = (5, 1)$ en la base B.
b. Escribe la matriz de cambio de base $P_{B \to C}$ (columnas: vectores de B).
c. Calcula $P_{C \to B} = P_{B \to C}^{-1}$ y úsala para hallar las coordenadas de $(2, 8)$ en B.
d. Interpreta geométricamente la base B.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Mezclar colores en un estudio de diseño

En un estudio de diseño gráfico de Barcelona, cada color de pantalla es un vector (R, G, B) de intensidades de rojo, verde y azul. Un programa genera colores combinando tres «tintas» base: rojo $r = (255, 0, 0)$, verde $g = (0, 255, 0)$ y blanco $w = (255, 255, 255)$.

a. ¿Son r, g, w una base de $\mathbb{R}^3$?
b. Expresa el color $c = (200, 150, 100)$ como combinación de r, g, w.
c. ¿Qué color se obtiene con coeficientes $(0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}5)$?
d. Si se usaran rojo, verde y amarillo $(255, 255, 0)$, ¿podría obtenerse c? Justifica.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Una dieta equilibrada

Un nutricionista de Pamplona describe cada alimento por el vector (proteínas, grasas, hidratos) en gramos por ración: lentejas $\ell = (10, 2, 30)$, huevo $h = (20, 5, 10)$ y yogur $y = (5, 15, 20)$. Quiere un menú con exactamente $(55, 27, 70)$ g.

a. Plantea el problema como una combinación lineal.
b. ¿Son ℓ, h, y linealmente independientes? ¿Qué consecuencia tiene?
c. Calcula el número de raciones de cada alimento.
d. Interpreta el resultado: ¿es realizable el menú?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – El perfil de una rampa de skate

El perfil de una rampa de un parque de skate de Madrid es $p(x) = x^2 + 3x + 2$ (en metros). En el espacio $\mathcal{P}_2$ de polinomios de grado ≤ 2 se considera la base $B = \{1,\ x - 1,\ (x - 1)^2\}$, útil para estudiar la rampa cerca de $x = 1$.

a. Justifica que B es una base de $\mathcal{P}_2$.
b. Calcula las coordenadas de p en B.
c. Comprueba que esas coordenadas son $p(1)$, $p'(1)$ y $\frac{p''(1)}{2}$.
d. ¿Qué información geométrica dan las dos primeras coordenadas?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Circulación en una red de calles

Una red de 4 cruces de un barrio de Zaragoza está unida por 5 calles. Los flujos $(f_1, \ldots, f_5)$ que respetan la conservación en cada cruce son las soluciones de $Af = 0$,

con .

a. Explica por qué el conjunto de flujos válidos es un subespacio de $\mathbb{R}^5$.
b. Calcula el rango de A y la dimensión del subespacio.
c. Halla una base.
d. Interpreta cada vector de la base como un circuito cerrado de la red.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Comprimir una señal de audio

Una aplicación de música de una empresa de Valencia representa trozos de 4 muestras de sonido como vectores de $\mathbb{R}^4$. En lugar de la base canónica usa la base de Haar: $h_1 = (1, 1, 1, 1)$, $h_2 = (1, 1, -1, -1)$, $h_3 = (1, -1, 0, 0)$, $h_4 = (0, 0, 1, -1)$.

a. Comprueba que los vectores de Haar son ortogonales dos a dos y deduce que son

base.
b. Calcula las coordenadas de la señal $s = (4, 2, 5, 5)$ en la base de Haar.
c. Interpreta la primera coordenada.
d. Para comprimir se anulan los coeficientes pequeños. Si se elimina el de h_3, ¿qué señal se reconstruye? ¿Qué error se comete?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Las sucesiones de los conejos

En un problema de cría de conejos de una granja escuela, el número de parejas cumple $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Sea V el conjunto de todas las sucesiones reales que cumplen esta recurrencia.

a. Demuestra que V es un subespacio vectorial del espacio de sucesiones.
b. Explica por qué una sucesión de V queda determinada por (a_0, a_1) y deduce que $\dim V = 2$.
c. Una base es $\{g, f\}$, con g empezando por $(1, 0)$ y f (Fibonacci) por $(0, 1)$. Escribe sus 6 primeros términos.
d. La sucesión de Lucas empieza por $2, 1$. Halla sus coordenadas en la base $\{g, f\}$ y calcula su décimo término L_9.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Las oscilaciones de un muelle

En el laboratorio de física de la Universidad de Cantabria, la posición $y(t)$ de una masa unida a un muelle cumple $y'' + y = 0$. Sea S el conjunto de soluciones.

a. Demuestra que S es un subespacio vectorial del espacio de funciones.
b. Comprueba que $\cos t$ y $\sin t$ están en S y son linealmente independientes.
c. Admitiendo que $\dim S = 2$, halla la solución con $y(0) = 3$ e $y'(0) = 2$.
d. Escribe la solución como $A\cos(t - \varphi)$ y calcula la amplitud A.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Interpolar temperaturas en Teruel

Una estación de Teruel midió 12 °C a las 9:00, 18 °C a las 10:00 y 16 °C a las 11:00. Tomamos $x = 0, 1, 2$ para esas horas. En $\mathcal{P}_2$ se usa la base de Lagrange $\ell_0 = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$, $\ell_1 = -x(x-2)$, $\ell_2 = \frac{x(x-1)}{2}$.

a. Calcula $\ell_i(j)$ para $i, j \in \{0, 1, 2\}$. ¿Qué observas?
b. Deduce que las coordenadas de un polinomio p en esta base son $(p(0), p(1), p(2))$.
c. Escribe el polinomio que interpola las temperaturas y desarróllalo.
d. Estima la temperatura a las 10:30.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: suma e intersección de subespacios

En $\mathbb{R}^4$ se consideran $U = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,1) \rangle$ y $W = \langle (1,1,0,0), (0,0,1,1) \rangle$. Queremos describir $U + W$ y $U \cap W$ y comprobar la fórmula de Grassmann $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

a. Calcula $\dim U$ y $\dim W$.
b. $U + W$ está generado por los cuatro vectores. Calcula su dimensión.
c. Deduce $\dim(U \cap W)$ con la fórmula de Grassmann.
d. Encuentra un vector no nulo de $U \cap W$ y comprueba que pertenece a ambos.
e. ¿Es la suma $U + W$ directa? ¿Es $U + W = \mathbb{R}^4$?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: descomposición en suma directa

En $\mathbb{R}^3$ sean el plano $P = \{x + y + z = 0\}$ y la recta $L = \langle (1,1,1) \rangle$. En estadística, esta descomposición separa unos datos en su media y sus desviaciones.

a. Demuestra que $P \cap L = \{0\}$.
b. Deduce con Grassmann que $\mathbb{R}^3 = P \oplus L$.
c. Descompón $v = (3,0,0)$ como $v = p + \ell$ con $p \in P$, $\ell \in L$.
d. Descompón las notas $(7,5,9)$ de tres exámenes y relaciona ℓ con la media.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: matrices simétricas y antisimétricas

En el espacio $M_2(\mathbb{R})$ de matrices 2×2 sean $\mathcal{S}$ las simétricas ($A^T = A$) y $\mathcal{A}$ las antisimétricas ($A^T = -A$).

a. Da una base de $M_2(\mathbb{R})$ y su dimensión.
b. Demuestra que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}$ son subespacios y halla una base y la dimensión de cada uno.
c. Demuestra que $M_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ usando $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$.
d. Descompón $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: una base que depende de un parámetro

Sean $u_1 = (1, a, 0)$, $u_2 = (a, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, a)$ en $\mathbb{R}^3$.

a. ¿Para qué valores de a forman base?
b. Para $a = 2$, halla las coordenadas de $v = (3,3,4)$ en esa base.

c. Para $a = 1$, ¿qué dimensión tiene $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$? Da una base.
d. Para $a = 0$, ¿qué subespacio generan?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: coordenadas en un panal

Una cooperativa apícola de Guadalajara estudia la estructura de sus panales. Los centros de las celdas forman una red: todos son de la forma $mu + nv$ con m, n enteros, donde $u = (1, 0)$ y $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (en centímetros).

a. Comprueba que $\{u, v\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ y calcula el ángulo entre u y v.
b. Calcula las coordenadas cartesianas de la celda $(m, n) = (3, 2)$.
c. ¿Qué coordenadas en la base $\{u, v\}$ tiene el punto $(2, \sqrt{3})$? ¿Es el centro de una celda?
d. Calcula la distancia entre las celdas $(0, 0)$ y $(3, 2)$ y explica por qué no es $\sqrt{3^2 + 2^2}$.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: uniones, intersecciones y polinomios

Demuestra los resultados siguientes.

a. La intersección de dos subespacios es un subespacio.
b. La unión $U \cup W$ es subespacio si y solo si $U \subseteq W$ o $W \subseteq U$.
c. Calcula la dimensión de $V = \{p \in \mathcal{P}_3 : \ p(1) = p(2) = 0\}$ y da una base.
d. Si $\dim E = n$ y $v_1, \ldots, v_n$ generan E, demuestra que son base.