Soluciones - Espacios vectoriales

Curso: Universidad 1

Solución del ejercicio 1

Planteamiento. Para que un subconjunto sea subespacio debe contener el vector nulo y ser cerrado para las combinaciones lineales. Una condición definida por ecuaciones lineales homogéneas lo cumple siempre; para refutarlo basta un contraejemplo concreto.

a. Sí. Si u, v cumplen la ecuación, $\lambda u + \mu v$ también, porque la ecuación es lineal y homogénea: $(\lambda u_1 + \mu v_1) + 2(\lambda u_2 + \mu v_2) - (\lambda u_3 + \mu v_3) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$.
b. No: $(0,0) \notin W_2$, y todo subespacio contiene al vector nulo.
c. No: $(1,0)$ y $(0,1)$ están en W_3 pero su suma $(1,1)$ no. Es la unión de los dos ejes.
d. Sí: si $p(1) = q(1) = 0$, entonces $(\lambda p + \mu q)(1) = 0$. Es un subespacio de dimensión 2, con base $\{x - 1,\ x^2 - 1\}$.

Solución del ejercicio 2

Planteamiento. Un vector es combinación lineal de otros si el sistema que iguala la combinación al vector es compatible. Lo resolvemos componente a componente y, para describir el subespacio generado, imponemos que un determinante se anule.

a. $\alpha(1,1,1) + \beta(0,1,2) = (1,4,7)$ da $\alpha = 1$, $1 + \beta = 4$, $1 + 2\beta = 7$: $\beta = 3$ en ambas. Sí: $w = v_1 + 3v_2$.
b. $\alpha = 1$, $1 + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -1$, pero entonces $1 + 2\beta = -1 \neq 0$. Sistema incompatible: no lo es.
c. .
d. $1 - 8 + 7 = 0$ y $1 - 0 + 0 = 1 \neq 0$.

Solución del ejercicio 3

Planteamiento. Los vectores son independientes si el rango de la matriz que forman es igual a su número. Con un parámetro calculamos el determinante y buscamos los valores que lo anulan; para esos valores escribimos una relación de dependencia explícita.

a. $(3,3,3) = (1,2,3) + (2,1,0)$: son dependientes. Equivalentemente, el determinante de la matriz es 0 y el rango es 2.
b. $\det = -(k-1)^2(k+2)$; son dependientes si $k = 1$ o $k = -2$.
c. $(1,1,-2) + (1,-2,1) + (-2,1,1) = (0,0,0)$.
d. No: el rango de una matriz 3×4 es como mucho 3, así que siempre hay una relación no trivial.

Solución del ejercicio 4

Planteamiento. La dimensión del subespacio es el número de incógnitas menos el número de ecuaciones independientes. Resolvemos el sistema en forma paramétrica: los vectores que acompañan a cada parámetro forman una base, que después completamos.

a. Dos ecuaciones independientes en $\mathbb{R}^4$: $\dim U = 4 - 2 = 2$.
b. $y = x$ y $t = -2x - z$. Con $x = \lambda$, $z = \mu$:
$(\lambda, \lambda, \mu, -2\lambda - \mu) = \lambda(1, 1, 0, -2) + \mu(0, 0, 1, -1)$. Base: $\{(1, 1, 0, -2), (0, 0, 1, -1)\}$.
c. $(1, 1, 0, -2)$: $1 + 1 + 0 - 2 = 0$ y $1 - 1 = 0$. $(0, 0, 1, -1)$: $0 + 0 + 1 - 1 = 0$ y $0 = 0$.
d. Añadimos $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ y $e_2 = (0, 1, 0, 0)$: el determinante de los cuatro vectores es $2 \neq 0$, así que forman base.

Solución del ejercicio 5

Planteamiento. A partir de los generadores escribimos ecuaciones paramétricas y eliminamos los parámetros. El número de ecuaciones implícitas necesarias es la dimensión del espacio menos la dimensión del subespacio.

a. $x = \lambda$, $y = \mu$, $z = \lambda + \mu$.
b. $z = x + y$, es decir $x + y - z = 0$.
c. $\dim W = 2$ en $\mathbb{R}^4$: hacen falta $4 - 2 = 2$ ecuaciones. De $x = \lambda$, $y = 2\lambda + \mu$, $z = \mu$, $t = \lambda + \mu$: $y = 2x + z$ y $t = x + z$. Ecuaciones: $2x - y + z = 0$, $x + z - t = 0$.
d. $4 - 3 + 1 = 2 \neq 0$: no pertenece.

Solución del ejercicio 6

Planteamiento. Las coordenadas de un vector en una base son los coeficientes de la combinación lineal que lo expresa, y se obtienen resolviendo un sistema. La matriz de cambio de base tiene en columnas los vectores de la base nueva, y su inversa hace el cambio contrario.

a. $\alpha(1, 1) + \beta(1, -1) = (5, 1)$: $\alpha + \beta = 5$, $\alpha - \beta = 1$, luego $\alpha = 3$, $\beta = 2$. $v_B = (3, 2)$.
b. $P_{B \to C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
c. $P_{C \to B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $(2, 8)_B = P_{C \to B} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.
d. Los ejes de B son las diagonales $y = x$ e $y = -x$, perpendiculares entre sí; es la base canónica girada 45° y ampliada por $\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 7

Planteamiento. Cada color es un vector de $\mathbb{R}^3$. Comprobamos con el determinante que las tintas forman base, resolvemos el sistema para obtener la mezcla y

estudiamos qué ocurre cuando los vectores son dependientes y solo generan un plano.

a. : sí.

b. $255(\alpha+\gamma)=200$, $255(\beta+\gamma)=150$, $255\gamma=100$. Así $\gamma=\frac{100}{255}\approx 0{,}392$, $\alpha=\frac{100}{255}\approx 0{,}392$ y $\beta=\frac{50}{255}\approx 0{,}196$.
c. $0{,}2r+0{,}2g+0{,}5w=(51+127{,}5,\ 51+127{,}5,\ 127{,}5)=(178{,}5;\ 178{,}5;\ 127{,}5)$, un tono amarillento claro.
d. No: amarillo $=r+g$, así que los tres vectores solo generan el plano $B=0$, y c tiene $B=100\neq 0$.

Solución del ejercicio 8

Planteamiento. El menú buscado es una combinación lineal de los alimentos con coeficientes no negativos. Si los alimentos forman base, la solución existe y es única; la calculamos resolviendo el sistema e interpretamos si es realizable.

a. Buscamos $a,b,c\geq 0$ con $a\ell+bh+cy=(55,27,70)$.
b. El determinante de la matriz es $7050\neq 0$: son independientes y forman base, así que la solución existe y es única.
c. Resolviendo: $a=1$, $b=2$, $c=1$ raciones.
d. Todas son positivas y enteras: el menú es realizable con una ración de lentejas, dos de huevo y una de yogur. Si alguna hubiera salido negativa, el objetivo no sería alcanzable con esos alimentos.

Solución del ejercicio 9

Planteamiento. Comprobamos que el sistema de polinomios es base porque sus grados son escalonados. Las coordenadas se obtienen igualando coeficientes o, mejor, evaluando el polinomio y sus derivadas en $x=1$, como en el desarrollo de Taylor.

a. Son 3 polinomios de grados 0, 1 y 2 (escalonados), luego independientes, y $\dim \mathcal{P}_2=3$.
b. $p=a+b(x-1)+c(x-1)^2$. Con $x=1$: $a=6$. El coeficiente de x^2 da $c=1$. El de x: $b-2c=3$, $b=5$. Coordenadas $(6,5,1)$.
c. $p(1)=6$, $p'(1)=2+3=5$, $\frac{p''(1)}{2}=1$. Es el desarrollo de Taylor en $x=1$.
d. La altura en $x=1$ (6 m) y la pendiente de la rampa en ese punto (5).

Solución del ejercicio 10

Planteamiento. El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo es un subespacio, el núcleo de la matriz. Calculamos el rango, deducimos la dimensión y buscamos una base cuyos vectores tienen una interpretación como circuitos cerrados de la red.

a. Es el núcleo de una matriz: el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo es siempre un subespacio.
b. La suma de las cuatro filas es nula y tres de ellas son independientes: $\operatorname{rg} A = 3$ y $\dim = 5 - 3 = 2$.
c. Por ejemplo $\{(1,1,1,1,0),\ (1,0,0,0,-1)\}$.
d. El primero es el ciclo que recorre las calles 1, 2, 3 y 4; el segundo, el ciclo formado por las calles 1 y 5. Todo flujo es combinación de estos dos ciclos.

Solución del ejercicio 11

Planteamiento. En una base ortogonal, cada coordenada se calcula con un producto escalar: $c_i = \frac{s \cdot h_i}{h_i \cdot h_i}$, sin resolver sistemas. Interpretamos las coordenadas y vemos el efecto de eliminar las pequeñas para comprimir la señal.

a. Todos los productos escalares se anulan, por ejemplo $h_1 \cdot h_2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$. Cuatro vectores no nulos ortogonales son independientes, luego base de $\mathbb{R}^4$.
b. Por ortogonalidad, $c_i = \frac{s \cdot h_i}{h_i \cdot h_i}$: $c_1 = \frac{16}{4} = 4$, $c_2 = \frac{-4}{4} = -1$, $c_3 = \frac{2}{2} = 1$, $c_4 = \frac{0}{2} = 0$. Así $s = 4h_1 - h_2 + h_3$.
c. Es la media de las cuatro muestras.
d. $4h_1 - h_2 = (3,3,5,5)$; error $s - (3,3,5,5) = (1,-1,0,0)$, de norma $\sqrt{2}$. Solo se guardan 2 números en lugar de 4.

Solución del ejercicio 12

Planteamiento. Las sucesiones que cumplen la recurrencia forman un subespacio, porque la recurrencia es lineal. Cada sucesión queda determinada por sus dos primeros términos, lo que da la dimensión 2 y permite escribir cualquier solución en una base.

a. Si a y b cumplen la recurrencia, $\lambda a_{n+2} + \mu b_{n+2} = (\lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1}) + (\lambda a_n + \mu b_n)$.
b. La aplicación $a \mapsto (a_0, a_1)$ es lineal y biyectiva de V en $\mathbb{R}^2$.
c. $g = (1,0,1,1,2,3,\ldots)$ y $f = (0,1,1,2,3,5,\ldots)$.
d. Coordenadas $(2,1)$: $L = 2g + f$. $L_9 = 2g_9 + f_9 = 2 \cdot 21 + 34 = 76$.

Solución del ejercicio 13

Planteamiento. Las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea forman un subespacio. Comprobamos que el seno y el coseno son soluciones independientes, ajustamos los coeficientes con las condiciones iniciales y calculamos la amplitud.

a. Si $y_1, y_2 \in S$, entonces $(\lambda y_1 + \mu y_2)'' + (\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$.
b. $(\cos t)'' = -\cos t$ y $(\sin t)'' = -\sin t$. Si $\alpha \cos t + \beta \sin t = 0$ para todo t, con $t = 0$ sale $\alpha = 0$ y con $t = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$.
c. $y = \alpha \cos t + \beta \sin t$; $y(0) = \alpha = 3$ e $y'(0) = \beta = 2$: $y = 3\cos t + 2 \sin t$.
d. $A = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$ y $\tan \varphi = \frac{2}{3}$.

Solución del ejercicio 14

Planteamiento. La base de Lagrange cumple $\ell_i(j) = 1$ si $i = j$ y 0 en otro caso, de modo que las coordenadas de un polinomio son sus valores en los nodos. Escribimos el polinomio interpolador y lo usamos para estimar la temperatura.

a. $\ell_i(j) = 1$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$.
b. Si $p = c_0\ell_0 + c_1\ell_1 + c_2\ell_2$, al evaluar en j solo queda c_j.
c. $p = 12\ell_0 + 18\ell_1 + 16\ell_2 = -4x^2 + 10x + 12$.
d. $p(1{,}5) = 18$ °C.

Solución del ejercicio 15

Planteamiento. Calculamos la dimensión de la suma con el rango de todos los generadores juntos y la de la intersección con la fórmula de Grassmann. Después buscamos un vector común a ambos subespacios y decidimos si la suma es directa.

a. Ambos están generados por dos vectores no proporcionales: $\dim U = \dim W = 2$.
b. La matriz con los cuatro vectores tiene rango 3, porque $(1,0,1,0) + (0,1,0,1) = (1,1,0,0) + (0,0,1,1)$. Así $\dim(U + W) = 3$.
c. $\dim(U \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$.
d. $(1,1,1,1)$ es la suma de los generadores de U y también la de los de W.
e. No es directa (la intersección no es nula) y $U + W \neq \mathbb{R}^4$ porque tiene dimensión 3.

Solución del ejercicio 16

Planteamiento. Para ver que la suma es directa comprobamos que la intersección es nula, y Grassmann da la dimensión total. Para descomponer un vector buscamos su componente en la recta (la media) y la diferencia, que debe estar en el plano.

a. Si $(t,t,t) \in P$, entonces $3t = 0$, $t = 0$.
b. $\dim(P + L) = 2 + 1 - 0 = 3$, luego $P + L = \mathbb{R}^3$ y la suma es directa.
c. $\ell = (t,t,t)$ con $t = \frac{3+0+0}{3} = 1$: $\ell = (1,1,1)$ y $p = (2,-1,-1)$, que cumple $2 - 1 - 1 = 0$.
d. $t = \frac{7+5+9}{3} = 7$: $\ell = (7,7,7)$ (la media) y $p = (0,-2,2)$ (las desviaciones, que suman 0).

Solución del ejercicio 17

Planteamiento. Las condiciones de simetría y antisimetría son lineales, así que definen subespacios. Escribimos la forma general de sus matrices para obtener bases, y la descomposición $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$ prueba la suma directa.

a. La base canónica $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$; dimensión 4.

b. Ambas condiciones son lineales. $\mathcal{S}$: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, base $\{E_{11}, E_{12}+E_{21}, E_{22}\}$, dimensión 3. $\mathcal{A}$: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, base $\{E_{12}-E_{21}\}$, dimensión 1.
c. El primer sumando es simétrico y el segundo antisimétrico. Si A es ambas cosas, $A=-A$ y $A=0$: intersección nula. Como $3+1=4$, la suma directa es todo el espacio.
d. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 18

Planteamiento. Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ forman base si su determinante no es nulo. Hallamos los valores del parámetro que lo anulan, calculamos coordenadas resolviendo un sistema y estudiamos el subespacio generado en los casos singulares.

a. $\det = a(1-a^2)$. Forman base si $a\neq 0$, $a\neq 1$ y $a\neq -1$.
b. $\alpha(1,2,0)+\beta(2,1,0)+\gamma(0,0,2)=(3,3,4)$: $\gamma=2$, $\alpha+2\beta=3$, $2\alpha+\beta=3$, luego $\alpha=\beta=1$. Coordenadas $(1,1,2)$.
c. $u_1=u_2=(1,1,0)$ y $u_3=(0,0,1)$: dimensión 2, base $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$.
d. $u_1=(1,0,0)$, $u_2=(0,1,0)$, $u_3=0$: generan el plano $z=0$.

Solución del ejercicio 19

Planteamiento. Comprobamos que los dos vectores forman base y calculamos su ángulo con el producto escalar. Pasamos de coordenadas en la base a cartesianas multiplicando, y al revés resolviendo un sistema; la base no es ortonormal y eso afecta a las distancias.

a. $\det = \frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$. $\cos\theta = u\cdot v = \frac{1}{2}$, luego $\theta = 60^\circ$.
b. $3u+2v=\left(3+1,\ \sqrt{3}\right)=(4,\sqrt{3})$.
c. $n\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow n=2$; $m+1=2\Rightarrow m=1$. Coordenadas $(1,2)$, enteras: sí es un centro.
d. $|(4,\sqrt{3})|=\sqrt{16+3}=\sqrt{19}\approx 4{,}36$ cm. La base no es ortonormal, así que no vale la fórmula de Pitágoras con las coordenadas.

Solución del ejercicio 20

Planteamiento. Usamos la definición de subespacio para la intersección y un argumento por reducción al absurdo para la unión. Para los polinomios con dos raíces fijadas factorizamos, y para el último apartado usamos que de un generador se extrae una base.

a. 0 está en ambos; si $u,v\in U\cap W$, $\lambda u+\mu v$ está en U y en W.

b. Si no hay inclusión, tomamos $u \in U \setminus W$ y $w \in W \setminus U$. Si $u + w \in U$, entonces $w = (u + w) - u \in U$: absurdo; análogo con W. Luego $u + w \notin U \cup W$.
c. $p = (x-1)(x-2)q(x)$ con $q \in \mathcal{P}_1$: dimensión 2, base $\{(x-1)(x-2),\ x(x-1)(x-2)\}$.
d. De un sistema generador se puede extraer una base; como toda base tiene n vectores, no se elimina ninguno.