# Soluciones del examen - Valores y vectores propios

Curso: Universidad 1 · Duración: 90 minutos · /20

## Solución del ejercicio 1 (5 puntos)

**Criterios.** Se valora el polinomio característico, los vectores propios y la coherencia entre $P$ y $D$.

a. $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$: $4$ y $1$. El polinomio característico es $\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = (\lambda - 4)(\lambda - 1)$. Comprobación: traza $5 = 4 + 1$ y determinante $4 = 4 \cdot 1$.

b. $V_4 = \langle (2, 1) \rangle$, $V_1 = \langle (1, -1) \rangle$. Para $\lambda = 4$, $(A - 4I)v = 0$ da $-x + 2y = 0$, es decir, $x = 2y$. Para $\lambda = 1$, $2x + 2y = 0$, es decir, $y = -x$.

c. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(4, 1)$. Las columnas de $P$ son los vectores propios en el mismo orden que los valores de $D$, y $A = PDP^{-1}$. $P$ es invertible porque $\det P = -3 \neq 0$.

## Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

**Criterios.** Se valora comparar la multiplicidad algebraica y la geométrica con el rango de $B - 2I$.

a. Triangular: 3 (simple) y 2 (doble). Al ser triangular, los valores propios son los elementos de la diagonal: 3 aparece una vez y 2 dos veces.

b. $\dim V_3 = 1$; $\operatorname{rg}(B - 2I) = 2$, $\dim V_2 = 1$. tiene rango 2, así que $\dim V_2 = 3 - 2 = 1$. Para un valor propio simple, como $\lambda = 3$, la dimensión es siempre 1.

c. No: $1 + 1 = 2 < 3$. Para $\lambda = 2$ la multiplicidad geométrica (1) es menor que la algebraica (2), de modo que no existe una base de vectores propios.

## Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

**Criterios.** Se valora la diagonalización y el cálculo de $C^n = PD^nP^{-1}$.

a. Valores 1 y 2; $V_1 = \langle (1, 0) \rangle$, $V_2 = \langle (1, 1) \rangle$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es triangular, así que sus valores propios son 1 y 2, distintos, y es diagonalizable. Para $\lambda = 1$: $y = 0$. Para $\lambda = 2$: $-x + y = 0$. Con $D = \operatorname{diag}(1, 2)$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. $C^n = P\,\mathrm{diag}(1, 2^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Se usa $C^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$, porque los factores $P^{-1}P$ intermedios se cancelan. Comprobación con $n = 2$: $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, y la fórmula da $2^2 - 1 = 3$ y $2^2 = 4$.

## Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

**Criterios.** Se valora la matriz de transición, el vector estacionario y la interpretación del segundo valor propio.

a. $M = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$. Cada columna suma 1: la de A indica que se queda el 70 % y se va el 30 %.
b. $(M - I)x = 0$: $-0{,}3a + 0{,}2b = 0$, $a : b = 2 : 3$: 400 en A y 600 en B. Con $a + b = 1000$ y $b = 1{,}5a$ resulta $a = 400$.
c. $\mathrm{tr}\, M = 1{,}5$, así que el otro es $0{,}5$: las diferencias con el equilibrio se reducen a la mitad cada mes. El valor propio 1 corresponde al equilibrio.

## Solución del ejercicio 5 (3 puntos)

**Criterios.** Se valora usar la traza y el determinante para hallar los valores propios.

a. $\lambda_2 + \lambda_3 = 5$ y $\lambda_2\lambda_3 = 6$: son 2 y 3. La traza es la suma de los valores propios y el determinante su producto: $1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6$ y $1 \cdot \lambda_2\lambda_3 = 6$. Son las raíces de $t^2 - 5t + 6 = 0$.
b. Sí: tres valores propios distintos. Una matriz de orden 3 con tres valores propios distintos tiene tres vectores propios linealmente independientes, que forman una base. Por tanto, $A$ es semejante a $\mathrm{diag}(1, 2, 3)$.