Apuntes - Valores y vectores propios

Curso: Universidad 1

Los valores y vectores propios de una matriz cuadrada revelan las direcciones en las que la transformación solo estira o encoge. Permiten calcular potencias de matrices, resolver sistemas dinámicos y clasificar formas cuadráticas, y son una de las ideas centrales del álgebra lineal.

Actividad de introducción

Cada hora, unas bicicletas compartidas pasan del centro de una ciudad a la periferia y otras hacen el camino contrario. Si se multiplica una y otra vez el reparto por la matriz de transición, ¿hacia dónde va el sistema? Calcular cien potencias de una matriz a mano es inviable, pero hay un truco: buscar direcciones especiales en las que la matriz solo estira o encoge los vectores, sin girarlos. En esas direcciones, multiplicar por la matriz es multiplicar por un número, y elevar a una potencia es elevar ese número. Estas direcciones son los vectores propios, y los números, los valores propios. Con ellos se predicen poblaciones, se ordenan páginas web, se estudian vibraciones y se resumen datos.

Valores y vectores propios

Definición: valores y vectores propios

Sea A una matriz $n \times n$. Un escalar λ es un **valor propio** de A si existe un vector $v \neq 0$ con $Av = \lambda v$; entonces v es un **vector propio** asociado. Los valores propios son las raíces del **polinomio característico** $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Para cada uno, los vectores propios (junto con el 0) forman el subespacio propio $\ker(A - \lambda I)$.

Propiedad

Propiedades. La suma de los valores propios (con multiplicidad) es la traza y su producto es el determinante. A es invertible si y solo si 0 no es valor propio. Los valores propios de A^k son los λ^k. Los de una matriz triangular son los de la diagonal. Vectores propios de valores propios distintos son linealmente independientes.
Teorema de Cayley-Hamilton: $p(A) = 0$; para 2×2 significa $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = 0$.

Diagonalización

Definición: diagonalización

Una matriz es **diagonalizable** si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = D$ es diagonal. Las columnas de P son vectores propios y la diagonal de D lleva los

valores propios. Condición: A es diagonalizable si y solo si hay n vectores propios independientes, es decir, si para cada valor propio la multiplicidad geométrica ($\dim\ker(A-\lambda I)$) coincide con la algebraica (multiplicidad como raíz). Si hay n valores propios reales distintos, siempre lo es. Entonces $A^k = PD^kP^{-1}$. El **teorema espectral** afirma que toda matriz simétrica real es diagonalizable con una base ortonormal de vectores propios ($P^{-1} = P^T$).

Aplicaciones

Propiedad

Con $A^k = PD^kP^{-1}$ se calculan potencias grandes, por ejemplo los términos de la sucesión de Fibonacci (valores propios $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$). Una forma cuadrática x^TAx con A simétrica es definida positiva si todos los valores propios son positivos, definida negativa si todos son negativos e indefinida si hay de ambos signos.

Método: diagonalizar una matriz

1. Calcula el polinomio característico det(A − λI).
2. Halla los valores propios.
3. Para cada uno resuelve (A − λI)v = 0.
4. Si hay n vectores propios independientes, forma P y D = P⁻¹AP.

Ejemplo 1

Valores propios de $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5)$. Para $\lambda = 2$: $2x + y = 0$, vector $(1, -2)$. Para $\lambda = 5$: $-x + y = 0$, vector $(1, 1)$.

Ejemplo 2

La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene el valor propio 2 doble, pero $\ker(A - 2I)$ tiene dimensión 1: no es diagonalizable.

Ejemplo 3

Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, los valores propios son 1 y 3, luego A^{10} tiene entradas $\frac{3^{10}\pm1}{2}$, es decir 29525 en la diagonal y 29524 fuera.

¡Atención!

Aceptar $v = 0$ como vector propio; creer que valores propios repetidos implican no diagonalizable (o que sí lo son); olvidar que P y D deben ordenarse de forma compatible; escribir $A^k = P^k D P^{-k}$ en lugar de PD^kP^{-1}; no comprobar la traza y el determinante al terminar.

Cómo se diagonaliza

Método: diagonalizar una matriz

1. Calcula el polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y sus raíces, con su multiplicidad algebraica.
2. Para cada valor propio λ, resuelve $(A - \lambda I)v = 0$; la dimensión de la solución es la multiplicidad geométrica, igual a $n - \operatorname{rg}(A - \lambda I)$.
3. La matriz es diagonalizable si las raíces son reales y cada multiplicidad geométrica coincide con la algebraica.
4. Coloca los vectores propios en columnas en P y los valores propios, en el mismo orden, en la diagonal de D.
5. Comprueba $AP = PD$, que es más fácil que calcular $P^{-1}AP$.

Definición: multiplicidad algebraica y geométrica

La multiplicidad algebraica de un valor propio λ es el número de veces que aparece como raíz del polinomio característico. La multiplicidad geométrica es la dimensión del subespacio propio V_λ, es decir, el número máximo de vectores propios independientes asociados a λ. Siempre se cumple $1 \le \dim V_\lambda \le m(\lambda)$. Cuando un valor propio es simple, las dos multiplicidades valen 1 y no hay nada que comprobar; los problemas aparecen con las raíces múltiples, en las que puede faltar algún vector propio. En ese caso la matriz no es diagonalizable, aunque todavía puede reducirse a la llamada forma de Jordan, que se estudia en cursos posteriores.

Propiedad: traza, determinante y semejanza

El polinomio característico no depende de la base: matrices semejantes tienen los mismos valores propios. La suma de los valores propios, contados con multiplicidad, es la traza, y su producto es el determinante. Por eso una matriz es invertible si y solo si 0 no es valor propio. Para una matriz 2×2, el polinomio característico es simplemente $\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$, lo que ahorra cálculos.

Teorema espectral

Toda matriz simétrica real es diagonalizable mediante una matriz ortogonal: existe una base ortonormal de vectores propios y todos los valores propios son reales. Este resultado es la base de la clasificación de las formas cuadráticas y de las cónicas y

cuádricas, del análisis de componentes principales en estadística y del estudio de las vibraciones en mecánica.

Ejemplo 4

Halla los valores propios de $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ usando la traza y el determinante.

Traza 7 y determinante $6 + 4 = 10$: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, con raíces 5 y 2. Comprobación: $5 + 2 = 7$ y $5 \cdot 2 = 10$.

Ejemplo 5

¿Es diagonalizable $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

Tiene el valor propio 3 doble, pero $A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1, así que $\dim V_3 = 1$. No es diagonalizable: no hay dos direcciones independientes que se conserven.

Ejemplo 6

En una granja de Lugo, cada año el 10 % de las ovejas sanas enferma y el 60 % de las enfermas se cura. ¿Qué proporción de ovejas estará sana a largo plazo?

$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. El vector propio de valor 1 cumple $-0{,}1s + 0{,}6e = 0$: $s = 6e$. A largo plazo están sanas $\frac{6}{7} \approx 86$ % de las ovejas; el otro valor propio, $0{,}3$, indica que el equilibrio se alcanza deprisa.

Aplicaciones de la diagonalización

Diagonalizar es elegir la base en la que una transformación se ve más sencilla. En esa base, calcular potencias es inmediato, y por eso la diagonalización permite estudiar procesos que se repiten paso a paso: poblaciones por edades con matrices de Leslie, cadenas de Markov que describen cuotas de mercado o movimientos de población, o sucesiones recurrentes como la de Fibonacci. El valor propio de mayor módulo, llamado dominante, decide el comportamiento a largo plazo: si es mayor que 1 el sistema crece, si es menor decrece y si vale 1 se estabiliza en la dirección de su vector propio. El cociente entre el segundo valor propio y el dominante indica la rapidez con que se alcanza ese régimen. En los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, cada valor propio da una solución exponencial $e^{\lambda t}v$, y los modos normales de vibración de puentes, edificios o instrumentos musicales corresponden a los vectores propios de la matriz de rigidez. Los ingenieros los calculan para evitar que una fuerza externa, como el viento o el paso de personas, coincida con una frecuencia propia y provoque resonancia. Finalmente, en estadística, los vectores propios de la matriz de covarianzas señalan las direcciones de

máxima variabilidad de unos datos, lo que permite reducir el número de variables sin perder casi información. En todos estos casos, el trabajo consiste en traducir el problema a una matriz, calcular sus valores y vectores propios e interpretar cada uno en el lenguaje de la situación concreta: una tasa de crecimiento, una frecuencia, una proporción de equilibrio o una dirección privilegiada.

¡Atención!

El vector nulo nunca es un vector propio, aunque cumpla $A0 = \lambda 0$. No toda matriz es diagonalizable: hay que comparar multiplicidades. El orden de las columnas de P debe coincidir con el de los valores propios en D. Y los valores propios de $A + B$ o de AB no son, en general, sumas ni productos de los de A y B.

¿Sabías que?

Las palabras eigenvalue y eigenvector, usadas en inglés, proceden del alemán eigen, que significa propio. El algoritmo PageRank, con el que nació un famoso buscador a finales de los años noventa, calcula el vector propio dominante de una matriz enorme que representa los enlaces entre páginas web, y los ingenieros estudiaron los modos propios del puente del Milenio de Londres tras descubrir que oscilaba al paso de los peatones.

El consejo de Otto

comprueba siempre que la suma de los valores propios es la traza y su producto es el determinante. Es un control inmediato.