Ejercicios - Valores y vectores propios

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Valores y vectores propios de una matriz 2×2

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Calcula el polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
b. Halla los valores propios.
c. Para cada valor propio, halla una base del subespacio propio.
d. Comprueba que $Av = \lambda v$ para los vectores obtenidos.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Polinomio característico de una matriz 3×3

Sea .

a. Comprueba que $(1, 1, 1)$ es vector propio y di su valor propio.
b. Calcula el rango de $A - I$ y deduce que 1 es valor propio y la dimensión de V_1.
c. Usa la traza para hallar el valor propio que falta y escribe el polinomio característico.
d. ¿Es A diagonalizable? Escribe P y D.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Diagonalizar una matriz

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calcula los valores propios.
b. Halla una base de vectores propios.
c. Escribe P y D con $P^{-1}AP = D$.
d. Comprueba el resultado calculando PD y AP.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Matrices no diagonalizables

Una matriz $n \times n$ es diagonalizable si y solo si la suma de las dimensiones de sus subespacios propios es n.

a. Estudia $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b. Estudia .

c. ¿Es diagonalizable toda matriz con valores propios distintos?
d. Da un ejemplo de matriz real 2×2 sin valores propios reales e interprétala.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Potencias de una matriz

Con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$ del ejercicio 3 se cumple $A^n = PD^nP^{-1}$.

a. Justifica la fórmula $A^n = PD^nP^{-1}$.
b. Calcula A^n en función de n.
c. Calcula A^5 con la fórmula y compruébalo con A^2.
d. Calcula $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{3^n}$.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Propiedades de los valores propios

Sea A una matriz 3×3 con valores propios 2, -1 y 3.

a. Calcula la traza y el determinante de A.
b. ¿Es A invertible? ¿Cuáles son los valores propios de A^{-1}?
c. Calcula los valores propios de A^2 y de $A + 4I$.
d. ¿Es A diagonalizable?

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Las bicicletas compartidas de Madrid

Un servicio de bicicletas compartidas tiene dos zonas, centro y periferia. Cada hora, el 10 % de las bicis del centro acaba en la periferia y el 20 % de las de la periferia acaba en el centro. Al empezar el día hay 30 bicis en cada zona: $x_{k+1} = Mx_k$.

a. Escribe la matriz M.
b. Calcula el reparto después de 1 y 2 horas.
c. Halla los valores y vectores propios de M.
d. ¿Hacia qué reparto tiende el sistema? ¿Con qué rapidez se acerca?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Una población de linces

En una reserva de Andalucía se estudia una población de lince ibérico con dos clases de edad: jóvenes j y adultos a. Cada año, cada joven produce de media 0,5 crías y cada adulto 1 cría; la mitad de los jóvenes sobrevive y pasa a adulto, y los adultos no sobreviven más de un año en este modelo simplificado.

a. Escribe la matriz de Leslie L tal que $(j, a)_{k+1} = L(j, a)_k$.
b. Partiendo de 40 jóvenes y 40 adultos, calcula la población durante 3 años.
c. Halla los valores propios y explica qué indica el mayor.
d. ¿Hacia qué proporción entre jóvenes y adultos tiende la población?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Fibonacci con matrices

La sucesión de Fibonacci del ejercicio de los girasoles de un jardín botánico cumple $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Comprueba que $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ para $n = 2, 3$.
b. Calcula los valores propios de A.
c. Explica por qué $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
d. Usa $\det(A^n) = (\det A)^n$ para demostrar la identidad de Cassini $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – El estanque elíptico de un parque

El borde de un estanque de un parque de Valencia tiene ecuación $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6$ (en decámetros). El término $4xy$ indica que la figura está inclinada. Se escribe como $v^T Q v = 6$ con $Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calcula los valores y vectores propios de Q.
b. En la base ortonormal de vectores propios, escribe la ecuación sin término cruzado.
c. Identifica la curva y calcula sus semiejes.
d. Calcula el área del estanque (πab).

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – La guerra de las compañías telefónicas

Dos compañías de telefonía móvil se reparten un mercado de 50 millones de líneas. Cada año, el 20 % de los clientes de la compañía A se pasa a B y el 30 % de los de B se pasa a A. Hoy A tiene 10 millones y B 40.

a. Escribe la matriz de transición M.
b. Halla sus valores y vectores propios.
c. Escribe x_k en función de k.
d. ¿Qué cuota de mercado alcanzará A? ¿Cuántos años tarda en superar el 55 %?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Dos depósitos conectados

Dos depósitos de una planta de tratamiento de agua de Huelva intercambian una sustancia. Si $x(t)$ e $y(t)$ son los kilos en cada uno, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Inicialmente hay 10 kg en el primero y 0 en el segundo.

a. Halla los valores y vectores propios de A.
b. Justifica que las soluciones son $c_1 e^{-t}(1,1) + c_2 e^{-3t}(1,-1)$.
c. Calcula c_1 y c_2 con las condiciones iniciales.
d. ¿Qué ocurre a largo plazo? ¿Cuándo tiene el segundo depósito la máxima cantidad?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Dos vagones unidos por muelles

En una maqueta de tren de un museo del ferrocarril, dos vagones de masa 1 están unidos entre sí y a dos topes por tres muelles iguales. Sus desplazamientos cumplen $x'' = -Kx$ con $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calcula los valores y vectores propios de K.
b. Un modo normal es una solución $x(t) = \cos(\omega t) v$ con v propio. Comprueba que hace falta $\omega^2 = \lambda$.
c. Describe los dos modos normales y sus frecuencias.
d. ¿Qué modo oscila más rápido? Interpreta físicamente.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Componentes principales de unos datos

En un estudio de un centro de salud de Gijón se miden dos variables estandarizadas de los pacientes. Su matriz de covarianzas es $C = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$.

a. Calcula los valores y vectores propios de C.

b. La varianza total es la traza. ¿Qué porcentaje explica la primera componente principal?
c. Escribe la dirección de la primera componente como vector unitario.
d. ¿Tiene sentido resumir los datos con una sola variable? Justifica.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: diagonalizar según un parámetro

Sea con $a \in \mathbb{R}$. Queremos saber para qué valores es diagonalizable y, en ese caso, diagonalizarla.

a. Calcula los valores propios y sus multiplicidades algebraicas.
b. Calcula la dimensión de V_1 según el valor de a.
c. Decide para qué valores de a es diagonalizable.
d. Para $a = 0$, ¿qué matrices P sirven?
e. Para $a = 1$, ¿puede encontrarse algún vector propio que no esté en el plano $z = 0$ o en el eje z? Justifica.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: reconstruir una matriz

Un ingeniero de una empresa de Vitoria sabe que una transformación f del plano estira por 2 en la dirección $(1, 1)$ y por 5 en la dirección $(1, -2)$, y necesita su matriz para programarla.

a. Escribe P y D.
b. Calcula $A = PDP^{-1}$.
c. Comprueba que $A(1, 1)^T = 2(1, 1)^T$ y $A(1, -2)^T = 5(1, -2)^T$.
d. Calcula $\det A$ y $\operatorname{tr} A$ y comprueba que coinciden con el producto y la suma de los valores propios.
e. ¿En qué factor multiplica f el área de las figuras?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: el teorema de Cayley-Hamilton

El teorema de Cayley-Hamilton afirma que toda matriz cuadrada anula su polinomio característico. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calcula el polinomio característico $p(\lambda)$.
b. Comprueba que $p(A) = A^2 - 4A + 3I = 0$.
c. Deduce una fórmula para A^{-1} sin hacer Gauss.
d. Expresa A^3 y A^4 como combinación de A e I.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: diagonalización ortogonal

Las matrices simétricas reales se diagonalizan con una matriz ortogonal ($Q^{-1} = Q^T$).

Sea de nuevo .

a. Comprueba que $(1, 1, 1)$ es ortogonal a $V_1 = \{x + y + z = 0\}$.
b. Halla una base ortonormal de V_1 (empieza por $(-1, 1, 0)$ y busca otro vector de V_1 perpendicular).
c. Escribe la matriz ortogonal Q y $Q^T A Q$.
d. ¿Por qué en una matriz simétrica los subespacios propios de valores distintos son siempre perpendiculares?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: ¿qué página es la más importante?

Un buscador ordena tres páginas web de una universidad. La página 1 enlaza a la 2 y a la 3; la 2 enlaza a la 3; y la 3 enlaza a la 1. Un internauta que salta al azar por los

enlaces se describe con $x_{k+1} = G x_k$, donde .

a. Explica el significado de la primera columna de G.
b. Comprueba que 1 es valor propio de G (las columnas suman 1).
c. Halla el vector propio de valor 1 cuyas componentes suman 1.
d. Ordena las páginas por importancia. ¿Por qué la página 3 empata con la 1 aunque recibe más enlaces?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: tres resultados teóricos

Demuestra los siguientes resultados.

a. Vectores propios de valores propios distintos son linealmente independientes (hazlo para dos).
b. Si $A^2 = A$, sus únicos valores propios posibles son 0 y 1.
c. Los valores propios de una matriz simétrica real son reales (usa $\overline{v}^T A v$).
d. Si A es diagonalizable y todos sus valores propios son 1, entonces $A = I$.