Soluciones - Valores y vectores propios

Curso: Universidad 1

Solución del ejercicio 1

Planteamiento. Los valores propios son las raíces del polinomio característico $\det(A-\lambda I)$. Para cada uno resolvemos el sistema homogéneo $(A-\lambda I)v=0$, que tiene infinitas soluciones, y elegimos un vector propio que comprobamos multiplicando.

a. $p(\lambda)=(4-\lambda)(3-\lambda)-2=\lambda^2-7\lambda+10$.
b. $\lambda^2-7\lambda+10=(\lambda-5)(\lambda-2)$: $\lambda_1=5$, $\lambda_2=2$.
c. $\lambda=5$: $(A-5I)v=0$ da $-x+y=0$, $V_5=\langle(1,1)\rangle$. $\lambda=2$: $2x+y=0$, $V_2=\langle(1,-2)\rangle$.
d. $A(1,1)^T=(5,5)^T=5(1,1)^T$ y $A(1,-2)^T=(2,-4)^T=2(1,-2)^T$.

Solución del ejercicio 2

Planteamiento. Aprovechamos la estructura de la matriz: un vector propio evidente, el rango de $A-I$ y la traza, que es la suma de los valores propios. Así evitamos desarrollar un determinante de orden 3 y decidimos si la matriz es diagonalizable.

a. $A(1,1,1)^T=(4,4,4)^T$: valor propio 4.
b. $A-I$ tiene todas las filas iguales a $(1,1,1)$: rango 1. Entonces $\det(A-I)=0$ y $\dim V_1=3-1=2$, con base $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$.
c. La traza es $6=4+1+\lambda_3$, así que $\lambda_3=1$: $p(\lambda)=-(\lambda-4)(\lambda-1)^2$.
d. Sí: las multiplicidades geométricas suman 3. , $D=\operatorname{diag}(4,1,1)$.

Solución del ejercicio 3

Planteamiento. Diagonalizar es encontrar una base de vectores propios. Calculamos valores y vectores propios, los colocamos en columnas en P y los valores propios en el mismo orden en D, y comprobamos que $AP=PD$.

a. $\lambda^2-2\lambda-3=0$: $\lambda=3$ y $\lambda=-1$.
b. $V_3=\langle(1,1)\rangle$, $V_{-1}=\langle(1,-1)\rangle$.
c. $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}$.
d. $AP=\begin{pmatrix}3&-1\\3&1\end{pmatrix}=PD$, que equivale a $P^{-1}AP=D$.

Solución del ejercicio 4

Planteamiento. Una matriz es diagonalizable si la dimensión de cada subespacio propio coincide con la multiplicidad del valor propio. Calculamos los rangos de $A - \lambda I$ para los valores propios múltiples y vemos si falta algún vector propio.

a. Valor propio doble 2, pero $J - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1: $\dim V_2 = 1$. No es diagonalizable.
b. Valores propios 1 (doble) y 2. $\operatorname{rg}(B - I) = 2$, $\dim V_1 = 1$: la suma es $1 + 1 = 2$. No diagonalizable.
c. Sí: si hay n valores propios distintos, sus vectores propios son independientes y forman base.
d. El giro de 90°, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $\lambda^2 + 1 = 0$. Ninguna dirección se conserva al girar.

Solución del ejercicio 5

Planteamiento. Al diagonalizar, las potencias se calculan con $A^n = PD^nP^{-1}$, porque los productos intermedios $P^{-1}P$ se cancelan. Elevamos solo los elementos de la diagonal y comprobamos la fórmula con potencias pequeñas.

a. $A^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots = PD^nP^{-1}$, porque los productos $P^{-1}P$ intermedios se cancelan.
b. $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}$.
c. $A^5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 243 - 1 & 243 + 1 \\ 243 + 1 & 243 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121 & 122 \\ 122 & 121 \end{pmatrix}$. Con $n = 2$: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = A^2$.
d. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, porque $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \to 0$.

Solución del ejercicio 6

Planteamiento. Usamos las relaciones entre valores propios y matriz: la traza es su suma y el determinante su producto. Si $Av = \lambda v$, el mismo vector es propio de A^{-1}, de A^2 y de $A + cI$ con valores propios transformados.

a. Traza $= 2 - 1 + 3 = 4$; $\det A = 2 \cdot (-1) \cdot 3 = -6$.
b. Sí, porque 0 no es valor propio. Si $Av = \lambda v$, entonces $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$: $\frac{1}{2}$, -1, $\frac{1}{3}$.
c. A^2: $4, 1, 9$. $A + 4I$: $6, 3, 7$ (con los mismos vectores propios).
d. Sí: tiene tres valores propios distintos.

Solución del ejercicio 7

Planteamiento. Escribimos la matriz de transición y la aplicamos hora a hora. El vector propio de valor 1 da el reparto de equilibrio, y el otro valor propio indica la rapidez con que el sistema se acerca a él.

a. $M = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

b. $x_1 = \begin{pmatrix} 33 \\ 27 \end{pmatrix}$ y $x_2 = \begin{pmatrix} \frac{351}{10} \\ \frac{249}{10} \end{pmatrix}$.

c. $\lambda_1 = 1$ con $(2,1)$ y $\lambda_2 = 0{,}7$ con $(1,-1)$.

d. $x_0 = (30,30) = 20(2,1) - 10(1,-1)$, así que $x_k = 20(2,1) - 10 \cdot 0{,}7^k(1,-1) \to (40,20)$. La diferencia se reduce un 30 % cada hora.

Solución del ejercicio 8

Planteamiento. La matriz de Leslie combina natalidad (primera fila) y supervivencia. Iteramos la matriz para ver la evolución, y el valor propio dominante y su vector propio dan la tasa de crecimiento y la proporción final entre edades.

a. $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix} 40 \\ 40 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 55 \\ 25 \end{pmatrix}$.

c. $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$: $\lambda = 1$ y $\lambda = -\frac{1}{2}$. El valor dominante 1 indica que la población ni crece ni decrece a largo plazo.

d. Al vector propio $(2,1)$: dos jóvenes por cada adulto. Como $(40,40) = \frac{80}{3}(2,1) - \frac{40}{3}(1,-1)$, la población tiende a $\begin{pmatrix} \frac{160}{3} \\ \frac{80}{3} \end{pmatrix}$, unos 80 ejemplares en total.

Solución del ejercicio 9

Planteamiento. La matriz de Fibonacci genera la sucesión al multiplicar. Calculamos sus valores propios, que son el número áureo y su conjugado; diagonalizando se obtiene la fórmula de Binet y el determinante da la identidad de Cassini.

a. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, con $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$.

b. $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ y $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618$.

c. Al diagonalizar, $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$; como $|\psi|$, $\psi^n \to 0$ y el cociente tiende a φ.

d. $\det A = -1$, luego $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \det A^n = (-1)^n$.

Solución del ejercicio 10

Planteamiento. La ecuación de la cónica es una forma cuadrática con matriz simétrica. Sus vectores propios ortogonales son los ejes de la elipse, y en esa base desaparece el término cruzado, lo que permite leer los semiejes.

a. $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$: $\lambda = 6$ con $(2,1)$ y $\lambda = 1$ con $(-1,2)$.
b. Con $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ y $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$: $6x'^2 + y'^2 = 6$, es decir $x'^2 + \frac{y'^2}{6} = 1$.
c. Una elipse de semiejes 1 y $\sqrt{6} \approx 2{,}45$ dam; el eje mayor sigue la dirección $(-1,2)$.
d. $\pi \cdot 1 \cdot \sqrt{6} \approx 7{,}70$ dam², es decir unos 770 m².

Solución del ejercicio 11

Planteamiento. Escribimos la matriz de transición, hallamos sus valores y vectores propios y descomponemos el reparto inicial en esa base. Cada componente evoluciona multiplicándose por su valor propio, lo que da una fórmula explícita.

a. $M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$.
b. $\lambda = 1$ con $(3,2)$ y $\lambda = \frac{1}{2}$ con $(1,-1)$.
c. $(10,40) = 10(3,2) - 20(1,-1)$, así que $x_k = 10(3,2) - 20\left(\frac{1}{2}\right)^k(1,-1)$.
d. A tiende a 30 millones, el 60 %. Supera el 55 % (27,5 millones) cuando $30 - 20 \cdot 0{,}5^k > 27{,}5$, es decir $0{,}5^k$: $k > 3$, a partir del cuarto año.

Solución del ejercicio 12

Planteamiento. Para un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, cada par propio da una solución exponencial $e^{\lambda t}v$. Combinamos las dos soluciones, ajustamos los coeficientes con las condiciones iniciales y estudiamos el comportamiento a largo plazo.

a. $\lambda = -1$ con $(1,1)$ y $\lambda = -3$ con $(1,-1)$.
b. Si $Av = \lambda v$, la función $e^{\lambda t}v$ cumple $(e^{\lambda t}v)' = \lambda e^{\lambda t}v = Ae^{\lambda t}v$; por linealidad, las combinaciones también son soluciones.
c. $c_1 + c_2 = 10$, $c_1 - c_2 = 0$: $c_1 = c_2 = 5$.
d. $y(t) = 5e^{-t} - 5e^{-3t} \to 0$: la sustancia se elimina.
$y' = -5e^{-t} + 15e^{-3t} = 0 \Rightarrow e^{2t} = 3$, $t = \frac{\ln 3}{2} \approx 0{,}55$, con $y = 1{,}92$ kg.

Solución del ejercicio 13

Planteamiento. Buscamos soluciones en las que los dos vagones oscilan con la misma frecuencia, los modos normales. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que la

dirección del movimiento es un vector propio y la frecuencia al cuadrado, su valor propio.

a. $\lambda = 1$ con $(1, 1)$ y $\lambda = 3$ con $(1, -1)$.
b. $x'' = -\omega^2 \cos(\omega t) v$ y $-Kx = -\lambda \cos(\omega t) v$: hace falta $\omega^2 = \lambda$.
c. Modo 1: $\omega = 1$, los vagones se mueven a la vez en el mismo sentido. Modo 2: $\omega = \sqrt{3} \approx 1{,}73$, se mueven en sentidos opuestos.
d. El segundo: al moverse en sentidos opuestos, el muelle central se estira y se comprime el doble, y la fuerza recuperadora es mayor.

Solución del ejercicio 14

Planteamiento. Los vectores propios de la matriz de covarianzas indican las direcciones de máxima variabilidad y los valores propios, la varianza en cada dirección. El cociente entre un valor propio y la traza da la proporción de varianza explicada.

a. $\lambda^2 - 50\lambda + 225 = 0$: $\lambda = 45$ con $(1, 1)$ y $\lambda = 5$ con $(1, -1)$.
b. Traza $= 50$; la primera explica $\frac{45}{50} = 90$ %.
c. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$: la suma de las dos variables.
d. Sí: con una sola combinación se conserva el 90 % de la variabilidad. Es la idea del análisis de componentes principales.

Solución del ejercicio 15

Planteamiento. La matriz es triangular, así que sus valores propios están en la diagonal. Estudiamos la dimensión del subespacio propio del valor doble según el parámetro y concluimos cuándo hay una base de vectores propios.

a. Es triangular: $\lambda = 1$ (doble) y $\lambda = 2$ (simple).
b. : rango 2 si $a \neq 0$ y 1 si $a = 0$. $\dim V_1 = 1$ si $a \neq 0$ y 2 si $a = 0$.
c. Solo para $a = 0$ (entonces ya es diagonal).
d. Cualquier matriz invertible cuyas dos primeras columnas sean base del plano $z = 0$ y la tercera un múltiplo no nulo de $(0, 0, 1)$.
e. No: $V_1 = \langle (1, 0, 0) \rangle$ y $V_2 = \langle (0, 0, 1) \rangle$; cualquier vector propio es múltiplo de uno de ellos.

Solución del ejercicio 16

Planteamiento. Si conocemos los vectores propios y sus valores, la matriz se reconstruye con $A = PDP^{-1}$. Comprobamos el resultado multiplicando por los vectores propios y verificamos que la traza y el determinante coinciden.

a. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
b. $P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.
c. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}(1,1)^T = (2,2)^T$ y $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}(1,-2)^T = (5,-10)^T$.
d. $\det A = 10 = 2 \cdot 5$ y $\operatorname{tr} A = 7 = 2 + 5$.
e. Por $|\det A| = 10$.

Solución del ejercicio 17

Planteamiento. El teorema de Cayley-Hamilton afirma que la matriz anula su polinomio característico. De esa ecuación despejamos la inversa como combinación de A e I y reducimos las potencias altas a combinaciones lineales de A e I.

a. $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$.
b. $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $A^2 - 4A + 3I = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0$.
c. $A(4I - A) = 3I$, luego $A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
d. $A^2 = 4A - 3I$; $A^3 = 4A^2 - 3A = 13A - 12I$; $A^4 = 13A^2 - 12A = 40A - 39I$.

Solución del ejercicio 18

Planteamiento. En una matriz simétrica, los subespacios propios son ortogonales. Buscamos una base ortonormal de cada subespacio propio, normalizando y, si hace falta, eligiendo vectores perpendiculares dentro del mismo subespacio.

a. $(1,1,1) \cdot (x,y,z) = x + y + z = 0$ para todo vector de V_1.
b. Buscamos (a,b,c) con $a + b + c = 0$ y $-a + b = 0$: $(-1,-1,2)$. Normalizando: $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$ y $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$.
c. y $Q^T A Q = \operatorname{diag}(4,1,1)$.
d. Si $Au = \lambda u$ y $Av = \mu v$, entonces $\lambda u \cdot v = Au \cdot v = u \cdot Av = \mu u \cdot v$ (por la simetría); como $\lambda \neq \mu$, $u \cdot v = 0$.

Solución del ejercicio 19

Planteamiento. La matriz de enlaces tiene columnas que suman 1, así que 1 es valor propio. El vector propio con componentes positivas que suman 1 da la importancia de cada página, que se interpreta según quién enlaza a quién.

a. Desde la página 1, el internauta va a la 2 o a la 3 con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada una.
b. Como las columnas suman 1, $(1,1,1)G = (1,1,1)$: 1 es valor propio de G^T y, por tanto, de G.
c. $x_3 = x_1$, $x_2 = \frac{1}{2}x_1$: proporcional a $(2,1,2)$; normalizando, $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.
d. Páginas 1 y 3 empatadas (40 %) y la 2 (20 %). La 3 recibe dos enlaces, pero uno viene de la 2, poco importante; la 1 recibe un solo enlace, de una página importante.

Solución del ejercicio 20

Planteamiento. Demostramos cada propiedad con la definición $Av = \lambda v$: combinando ecuaciones para la independencia, elevando al cuadrado para las idempotentes, conjugando para las simétricas y usando $A = PDP^{-1}$ en el último apartado.

a. Si $\alpha u + \beta v = 0$, aplicando A: $\alpha\lambda u + \beta\mu v = 0$. Restando λ veces la primera: $\beta(\mu - \lambda)v = 0$, luego $\beta = 0$ y $\alpha = 0$.
b. $Av = \lambda v \Rightarrow A^2 v = \lambda^2 v = Av = \lambda v$, así que $\lambda^2 = \lambda$.
c. $\overline{v}^T Av = \lambda\, \overline{v}^T v$; conjugando y usando $A^T = A$ real, $\overline{v}^T Av$ es real; como $\overline{v}^T v = \|v\|^2 > 0$, λ es real.
d. $A = PIP^{-1} = I$.