# Soluciones del examen - Derivadas y desarrollo de Taylor

Curso: Universidad 1 · Duración: 90 minutos · /20

## Solución del ejercicio 1 (5 puntos)

**Criterios.** Se valora aplicar correctamente las reglas del producto, del cociente y de la cadena y simplificar el resultado.

a. $f'(x) = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$. Regla del producto con $u = x^2$ y $v = \ln x$: $u'v + uv' = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$. Solo tiene sentido para $x > 0$.

b. $g'(x) = \dfrac{2e^{2x}(1+x^2) - e^{2x}\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2 - x + 1)}{(1+x^2)^2}$. En el numerador se saca factor común $2e^{2x}$: $2e^{2x}(1 + x^2 - x)$. El trinomio $x^2 - x + 1$ no tiene raíces reales, así que $g' > 0$ y $g$ es creciente.

c. $h'(x) = \dfrac{3}{1 + 9x^2}$. Regla de la cadena con $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$, $u = 3x$ y $u' = 3$.

## Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

**Criterios.** Se valora comprobar la indeterminación antes de usar L'Hôpital o Taylor y justificar cada paso.

a. Con Taylor, $x - \sin x = \frac{x^3}{6} - \cdots$; el límite es $\frac{1}{6}$. (Con L'Hôpital tres veces: $\frac{1-\cos x}{3x^2} \to \frac{\sin x}{6x} \to \frac{\cos x}{6} \to \frac{1}{6}$.) Al sustituir $x = 0$ sale $\frac{0}{0}$. El desarrollo es $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, luego $\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} + o(1)$.

b. Es $\frac{0}{0}$. Derivamos: $\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \to \frac{2}{1} = 2$. Con Taylor se llega a lo mismo: $e^x - e^{-x} = 2x + o(x)$ y $\sin x = x + o(x)$, cuyo cociente tiende a 2.

## Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

**Criterios.** Se valora el dominio, las asíntotas, el signo de la derivada y la conclusión sobre los extremos.

a. Dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Asíntota vertical $x = 1$; como $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$, la asíntota oblicua es $y = x + 1$. Para la oblicua se divide $x^2$ entre $x - 1$. No hay asíntota horizontal porque el grado del numerador supera al del denominador.

b. $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Crece en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y decrece en $(0, 1) \cup (1, 2)$. Máximo local $f(0) = 0$ y mínimo local $f(2) = 4$. Comprobación: $f(2) = \frac{4}{1} = 4$.

## Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

**Criterios.** Se valora plantear la función de una variable, derivar, comprobar el mínimo y dar las medidas con unidades.

a. La altura es $h = 32/x^2$ y $S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \dfrac{128}{x}$. El material es el fondo ($x^2$) más las cuatro caras laterales ($4 \cdot x \cdot h$); se usa el volumen $x^2 h = 32$ para despejar la altura. El dominio es $x > 0$.

b. $S'(x) = 2x - \dfrac{128}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$ dm, $h = 2$ dm. $S'' > 0$, mínimo. $S(4) = 16 + 32 = 48$ dm². Comprobación: $S''(x) = 2 + \frac{256}{x^3}$, positiva para $x > 0$; en $x = 4$ vale 6. Respuesta: base de $4 \times 4$ dm y altura de 2 dm, con 48 dm² de material.

## Solución del ejercicio 5 (3 puntos)

**Criterios.** Se valora interpretar derivadas como velocidades y responder a cada pregunta con unidades y contexto.

a. $h'(t) = -10t + 30 = 0 \Rightarrow t = 3$ s. La velocidad es la derivada de la altura; la altura es máxima cuando la velocidad se anula, porque el cohete pasa de subir a bajar.

b. $h(3) = -45 + 90 = 45$ m. Es el vértice de la parábola.

c. $h(t) = 0 \iff t(-5t + 30) = 0 \iff t = 6$ s. La velocidad es $h'(6) = -30$ m/s (30 m/s hacia abajo). El signo negativo indica que baja; por simetría llega con la misma rapidez con la que salió, $h'(0) = 30$ m/s.

d. $dh = h'(2) \cdot 0{,}1 = 10 \cdot 0{,}1 = 1$ m. Exacto: $h(2{,}1) - h(2) = (-22{,}05 + 63) - (-20 + 60) = 40{,}95 - 40 = 0{,}95$ m. La diferencial sobrestima en 0,05 m porque la curva es cóncava.