Apuntes - Derivadas y desarrollo de Taylor

Curso: Universidad 1

La derivada mide la variación instantánea de una función y es la herramienta central del Cálculo en una variable. En este tema repasamos su definición y reglas, los teoremas fundamentales sobre intervalos (Rolle y valor medio), la regla de L'Hôpital y la aproximación polinómica de Taylor, con control del error.

Actividad de introducción

Un conductor sale de Madrid hacia Valencia y tarda 3 horas y 30 minutos en recorrer 350 km: su velocidad media es de 100 km/h. Sin embargo, el velocímetro marcó muchos valores distintos durante el viaje, y la policía solo le puede multar por el valor que marcaba en un instante concreto. La velocidad media es un cociente de incrementos; la velocidad instantánea es el límite de esos cocientes cuando el intervalo se hace tan pequeño como se quiera. Ese límite es la derivada, la herramienta con la que medimos cambios, optimizamos recursos y aproximamos funciones complicadas con polinomios.

Definición y reglas

Definición: definición y reglas

$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ si el límite existe y es finito. Geométricamente es la pendiente de la recta tangente: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Si f es derivable en a, es continua en a (el recíproco es falso: $|x|$ no es derivable en 0). Reglas: suma, producto $(fg)' = f'g + fg'$, cociente $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ y regla de la cadena $(f\circ g)' = f'(g)\,g'$. Derivadas básicas: $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = 1/x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$. Para f^g se usa la derivación logarítmica: $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$.

Teoremas de Rolle y del valor medio

Teorema: Rolle

Rolle: si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$, existe $c \in (a,b)$ con $f'(c) = 0$. **Valor medio de Lagrange:** con las mismas hipótesis (sin $f(a) = f(b)$), existe c con $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Consecuencias: si $f' > 0$ en un intervalo, f es estrictamente creciente; si $f' = 0$, f es constante. También permite demostrar desigualdades: por ejemplo $\ln(1+x)$ para $x > 0$.

Regla de L'Hôpital

Definición: regla de l'hôpital

Si $\lim \frac{f}{g}$ es una indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y existe $\lim \frac{f'}{g'}$, ambos límites coinciden. Se puede aplicar varias veces; otras indeterminaciones se reducen a estas con logaritmos o transformaciones algebraicas.

Polinomio de Taylor

Propiedad

El polinomio de Taylor de orden n de f en a es $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Con el **resto de Lagrange** $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ (ξ entre a y x) se acota el error.

Desarrollos en 0 imprescindibles: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$;
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$; $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$; $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$.
Sirven para calcular límites: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$.

Estudio de funciones

Definición: estudio de funciones

Los puntos críticos cumplen $f'(c) = 0$. Si $f''(c) > 0$ hay mínimo local, si $f''(c)$ máximo local. Un punto de inflexión es donde cambia la concavidad (f'' cambia de signo). En problemas de optimización se expresa la magnitud en una variable, se deriva y se comparan los candidatos con los extremos del intervalo.

Método: calcular un polinomio de Taylor

1. Elige el punto a y el orden n.
2. Calcula las derivadas hasta el orden n.
3. Evalúa cada derivada en a y divide por k!.
4. Escribe el polinomio y acota el resto de Lagrange.

Ejemplo 1

$\frac{d}{dx}\left(x^2 e^{3x}\right) = 2xe^{3x} + 3x^2 e^{3x} = e^{3x}(2x + 3x^2)$.

Ejemplo 2

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim \frac{e^x - 1}{2x} = \lim \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 3

Aproximar $e^{0,1}$ con P_3: $1+0{,}1+0{,}005+0{,}000167\approx 1{,}105167$, con error menor que $\frac{e^{0,1}(0,1)^4}{24}$.

¡Atención!

Aplicar L'Hôpital sin ser indeterminación; derivar x^x como $x\cdot x^{x-1}$; olvidar el factorial en Taylor; confundir punto crítico con extremo (en x^3 el punto crítico 0 no es extremo); dar el error de Taylor sin acotar la derivada siguiente.

Método: resolver un problema de optimización

1. Lee el enunciado y dibuja un esquema con las magnitudes: datos, incógnitas y la magnitud que debe hacerse máxima o mínima.
2. Escribe la función objetivo y expresa todas las variables en función de una sola mediante la condición del problema.
3. Determina el dominio razonable de la variable (longitudes positivas, valores posibles).
4. Deriva, iguala a cero y resuelve; clasifica los puntos críticos con la derivada segunda o con el signo de la derivada.
5. Compara con los extremos del dominio si es un intervalo cerrado y responde con unidades y en palabras.

Método: estudio completo de una función

1. Dominio, simetrías y puntos de corte con los ejes.
2. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas mediante límites.
3. Primera derivada: signo, intervalos de crecimiento y extremos relativos.
4. Segunda derivada: signo, concavidad y puntos de inflexión.
5. Tabla resumen y esbozo de la gráfica, comprobando que cada dato es coherente con los demás.

Ejemplo 4

Halla la recta tangente a $f(x)=\ln x$ en $x=e$.

Como $f(e)=1$ y $f'(x)=\frac{1}{x}$, resulta $f'(e)=\frac{1}{e}$. La recta es $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$, es decir, $y=\frac{x}{e}$. Observa que pasa por el origen.

Ejemplo 5

Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x)=\sqrt{x}$ en $a=4$ y úsalo para aproximar $\sqrt{4{,}2}$.

Las derivadas son $f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y $f'' = -\frac{1}{4x^{3/2}}$; en $x = 4$ valen $f = 2$, $f' = \frac{1}{4}$ y $f'' = -\frac{1}{32}$. Entonces $P_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$. Con $x = 4{,}2$: $2 + 0{,}05 - 0{,}000625 = 2{,}049375$, muy cercano al valor real $2{,}04939$.

Ejemplo 6

Una empresa de Sevilla estima que sus ingresos son $I(x) = 60x - 0{,}2x^2$ (en euros) al vender x unidades. ¿Cuántas unidades maximizan el ingreso?

$I'(x) = 60 - 0{,}4x = 0$ da $x = 150$ y $I'' = -0{,}4$, luego es un máximo. El ingreso máximo es $I(150) = 9\,000 - 4\,500 = 4\,500$ €.

Derivadas de orden superior y concavidad

Si la derivada de una función es a su vez derivable, podemos derivar otra vez y obtener la derivada segunda. Su signo informa de la forma de la gráfica: cuando es positiva la función es convexa (cóncava hacia arriba), la gráfica queda por encima de sus tangentes y el punto crítico, si existe, es un mínimo; cuando es negativa la función es cóncava (hacia abajo) y el punto crítico es un máximo. Los puntos donde la derivada segunda cambia de signo son los puntos de inflexión, en los que la curva pasa de un tipo de curvatura al otro. En física, la derivada segunda de la posición respecto del tiempo es la aceleración, y en economía mide si el coste marginal crece o decrece.

Aplicaciones de la derivada a otras ciencias

La derivada aparece en cualquier fenómeno en el que importe la rapidez de un cambio. En química, la velocidad de una reacción es la derivada de la concentración respecto del tiempo; en biología, la tasa de crecimiento de una población es la derivada del tamaño de la población; en medicina, la velocidad con que un fármaco se elimina de la sangre es la derivada de la concentración; en ingeniería, la pendiente de una carretera se obtiene derivando su perfil de altura. Todos estos modelos comparten la misma estructura matemática, lo que permite aplicar el mismo método de optimización o de estudio de funciones a contextos muy diversos. Por eso conviene acostumbrarse a traducir cada enunciado a una función de una variable, a identificar qué representa su derivada y a interpretar el resultado con las unidades correctas.

Teoremas fundamentales sobre derivadas

Los teoremas de Rolle y del valor medio conectan la derivada con el comportamiento global de la función: si una función derivable toma el mismo valor en los extremos de un intervalo, su derivada se anula en algún punto interior; y, en general, la pendiente de la recta que une dos puntos de la gráfica coincide con la pendiente de alguna tangente. De ellos se deducen los criterios de monotonía (derivada positiva implica función creciente), la unicidad de raíces y las acotaciones de errores. La regla de L'Hôpital, que utilizamos para resolver indeterminaciones, también se demuestra a partir de una versión generalizada del teorema del valor medio.

El polinomio de Taylor de grado n en el punto a es $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ y el error se acota con el resto de Lagrange $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algún c entre a y x.

Con este resto sabemos cuántos términos necesitamos para alcanzar la precisión deseada, algo fundamental en cálculo numérico y en programación de funciones elementales en calculadoras y ordenadores.

¡Atención!

Un punto crítico no siempre es un extremo: $f(x) = x^3$ tiene $f'(0) = 0$ y, sin embargo, crece a ambos lados. Tampoco se debe usar la regla de L'Hôpital si el límite no es indeterminado (por ejemplo, $\frac{x+1}{x}$ en $x \to 0$ no es $\frac{0}{0}$), ni derivar numerador y denominador como si fuera un cociente. Otro error frecuente es olvidar la regla de la cadena: la derivada de $\sin(3x)$ es $3\cos(3x)$ y no $\cos(3x)$.

Observación

La derivada de una función en un punto puede interpretarse de tres maneras equivalentes: como pendiente de la recta tangente, como razón de cambio instantánea y como mejor aproximación lineal local. La física usa la segunda (velocidad y aceleración), la economía la llama coste o ingreso marginal y la geometría trabaja con la primera. Entender las tres interpretaciones ayuda a elegir el método más adecuado en cada problema.

¿Sabías que?

La notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ y las ideas de Newton sobre el cambio instantáneo se desarrollaron de forma independiente en el siglo XVII. Brook Taylor publicó su serie en 1715, pero las series de ese tipo ya eran conocidas por matemáticos indios de la escuela de Kerala siglos antes. Hoy, las calculadoras y los ordenadores calculan funciones como $\sin x$ o e^x con polinomios muy parecidos a los de Taylor.

El consejo de Otto

si aparece una indeterminación con funciones elementales cerca de 0, escribe los primeros términos de Taylor: casi siempre se cancela lo que molesta.