Ejercicios - Derivadas y desarrollo de Taylor

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Derivadas con las reglas básicas

Deriva cada función y simplifica el resultado.

a. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x$
b. $g(x) = x^3 e^x$
c. $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Regla de la cadena

Identifica la función exterior y la interior antes de derivar.

a. $\sin(x^2)$
b. $\ln(1 + x^2)$
c. $\sqrt{1 + x^2}$
d. $e^{3x} \cos x$

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Recta tangente y normal

Sea $f(x) = x^3 - 2x$ y el punto de abscisa $x = 1$.

a. Calcula $f(1)$ y $f'(1)$.
b. Escribe la ecuación de la recta tangente.
c. Escribe la ecuación de la recta normal.
d. ¿En qué puntos la tangente es horizontal?

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Derivación logarítmica e implícita

Algunas funciones no se derivan con las reglas directas.

a. Deriva $y = x^x$ para $x > 0$ tomando logaritmos.

b. Si $x^2 + y^2 = 25$, halla y' y la pendiente de la tangente en $(3, 4)$.
c. Deriva $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt{x}}{e^x}$ con derivación logarítmica.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Regla de L'Hôpital

Aplica la regla solo cuando el límite sea de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$; comprueba cada paso.

a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$
b. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$
c. $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$
d. $\lim_{x\to \infty} x^2 e^{-x}$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Polinomios de Taylor en el origen

Calcula los polinomios de Maclaurin pedidos derivando y evaluando en $x = 0$.

a. e^x de grado 3
b. $\sin x$ de grado 3
c. $\ln(1 + x)$ de grado 3
d. $\cos x$ de grado 4

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – El movimiento de un coche en un tramo

Un coche teledirigido se prueba en un pabellón de la Universidad de Cantabria sobre una pista recta. Su posición (en metros) respecto de la salida es $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, con t en segundos, $0 \le t \le 5$.

a. Calcula la velocidad $v(t) = s'(t)$ y la aceleración $a(t) = s''(t)$.
b. ¿En qué instantes está parado el coche?
c. ¿Cuál es la posición en esos instantes? Interpreta el movimiento.
d. Calcula la velocidad media entre $t = 0$ y $t = 5$ y compárala con la velocidad instantánea en $t = 5$.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – El corral junto al río

Un ganadero de Cantabria dispone de 200 m de valla para cercar un prado rectangular que limita con un río, por lo que no necesita valla en ese lado. Sea x la longitud de

cada lado perpendicular al río.

a. Expresa el lado paralelo al río y el área $A(x)$ en función de x.
b. ¿Cuál es el dominio de x?
c. Halla el valor de x que maximiza el área y comprueba que es un máximo.
d. Calcula las dimensiones y el área máxima.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La lata de conserva de menor material

Una fábrica de conservas de Murcia quiere diseñar una lata cilíndrica de 500 cm³ de capacidad que use la menor cantidad posible de hojalata.

a. Expresa la altura h en función del radio r y escribe la superficie $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ como función de r.
b. Calcula $S'(r)$ y halla el radio crítico.
c. Comprueba con la derivada segunda que es un mínimo.
d. Calcula h y la relación h/r. ¿Qué observas?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Coste medio mínimo de un taller

El coste total (en euros) de fabricar x unidades de una pieza en un taller de Vitoria es $C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}6x^2 + 13x$ para $x > 0$. El coste medio es .

a. Escribe y calcula el coste marginal $C'(x)$.
b. Halla la producción que minimiza el coste medio.
c. Calcula el coste medio mínimo y compáralo con el coste marginal en ese punto.
d. Interpreta el resultado económicamente.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El radar de tramo

En un tramo de autovía de 40 km entre dos radares, un coche pasa por el primero a las 10:00 y por el segundo a las 10:20. El límite de velocidad es 120 km/h. Supón que la posición $s(t)$ del coche es una función derivable.

a. Calcula la velocidad media del coche en el tramo.
b. Aplica el teorema del valor medio y concluye algo sobre la velocidad instantánea.
c. ¿Puede el conductor justificar que nunca superó 120 km/h? Razona.
d. Enuncia las hipótesis del teorema que se han usado.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Aproximaciones lineales

La aproximación lineal de f cerca de a es $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$. Un técnico de laboratorio la usa para estimar valores sin calculadora.

a. Aproxima $\sqrt{101}$ con $f(x) = \sqrt{x}$ y $a = 100$.
b. Aproxima $\ln(1{,}02)$ con $a = 1$.
c. Un cubo de arista 10 cm se dilata hasta 10,1 cm. Estima la variación de volumen con la diferencial $dV = 3x^2\,dx$.
d. Calcula el error exacto del apartado c).

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El café se enfría

Un café sale de la máquina de una cafetería de Sevilla a 85 °C. La temperatura ambiente es de 20 °C y, según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura (en °C) al cabo de t minutos es $T(t) = 20 + 65e^{-0{,}1t}$.

a. Comprueba que $T(0) = 85$.
b. Calcula $T'(t)$ y la velocidad de enfriamiento en $t = 5$.
c. ¿En qué instante la temperatura es de 40 °C?
d. Calcula $\lim_{t\to\infty} T(t)$ e interpreta el signo de T'.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Estudio de una función polinómica

Estudia $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

a. Calcula $f'(x)$ y los puntos críticos.
b. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y clasifica los extremos.
c. Calcula $f''(x)$ y el punto de inflexión.
d. Indica los intervalos de concavidad y el número de raíces reales (usa los extremos).

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: estudio completo de x e^(-x)

En un modelo de farmacocinética, la concentración de un medicamento en sangre (en mg/L) se ajusta a $c(t) = te^{-t}$ para $t \geq 0$ (horas). Estudia la función como si fuera una función de variable real y luego interpreta cada resultado.

a. Calcula $c(0)$ y $\lim_{t\to\infty} c(t)$. ¿Qué asíntota tiene?
b. Calcula $c'(t)$ y estudia el crecimiento. ¿Cuándo se alcanza la concentración máxima y cuál es?

c. Calcula $c''(t)$ y halla el punto de inflexión.
d. Esboza la gráfica y explica con palabras cómo evoluciona la concentración.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: seno de 0,1 con cota de error

Una calculadora sencilla de una pequeña empresa de topografía solo dispone de operaciones básicas, pero el técnico necesita $\sin(0{,}1)$ con un error menor que 10^{-6} (el ángulo está en radianes). Decide usar el polinomio de Taylor de $\sin x$ en el origen.

a. Escribe $P_4(x)$ (que coincide con $P_3(x)$) y calcula $P_4(0{,}1)$.
b. Escribe el resto de Lagrange para $n = 4$ y acótalo para $x = 0{,}1$ sabiendo que $|\sin^{(5)}| \leq 1$.
c. ¿Es suficiente este polinomio para el error exigido de 10^{-6}?
d. ¿Qué grado haría falta para tener un error menor que 10^{-12} (usa la cota con $n+1$ derivadas)?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: la ventana normanda

Un carpintero de Salamanca construye una ventana con forma de rectángulo coronado por un semicírculo cuyo diámetro es la base del rectángulo. El perímetro total de la ventana (los cuatro lados exteriores, sin contar la base interior del semicírculo) es 6 m. Sea r el radio del semicírculo y h la altura del rectángulo.

a. Escribe el perímetro $2h + 2r + \pi r = 6$ y despeja h en función de r.
b. Escribe el área $A(r) = 2rh + \dfrac{\pi r^2}{2}$ en función de r.
c. Halla el radio que maximiza el área y comprueba que es un máximo.
d. Calcula h, el ancho total y el área máxima. ¿Qué relación hay entre h y r?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: el punto más cercano

Un dron de reparto que parte del punto $A(4, 0)$ (en kilómetros) debe aterrizar sobre una carretera cuyo trazado se aproxima por la curva $y = \sqrt{x}$. Se busca el punto de la curva más cercano a A.

a. Escribe el cuadrado de la distancia $D(x)$ de A a un punto $(x, \sqrt{x})$ de la curva.
b. Halla $D'(x)$ y resuelve $D'(x) = 0$.
c. Justifica que el punto crítico es un mínimo.
d. Calcula las coordenadas del punto y la distancia mínima.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: desigualdades con el teorema del valor medio

En un curso de análisis se quiere demostrar desigualdades que luego se usan para acotar errores en simulaciones.

a. Aplica el teorema del valor medio a $f(t) = e^t$ en $[0, x]$ para demostrar que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \geq 0$.
b. Aplica el teorema a $\ln(1 + t)$ en $[0, x]$ para probar $\ln(1 + x) \leq x$ para $x > 0$.
c. Deduce que $\ln(1{,}02)$ y que la aproximación lineal de $\ln(1 + x)$ en 0 siempre sobreestima.
d. Prueba que $\sin x$ para 0 usando el teorema.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: límites con desarrollos de Taylor

Utiliza los desarrollos de Maclaurin para calcular cada límite sin aplicar L'Hôpital varias veces.

a. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$

b. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$

c. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x} \right)$