Soluciones - Derivadas y desarrollo de Taylor

Curso: Universidad 1

Solución del ejercicio 1

Planteamiento. Identificamos en cada función la estructura principal: suma de potencias, producto o cociente. Aplicamos la regla correspondiente, $(fg)' = f'g + fg'$ o $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, y al final sacamos factor común para dejar el resultado simplificado.

a. Derivamos término a término: $f'(x) = 12x^3 - 4x + 1$.
b. Regla del producto: $g'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x)$.
c. Regla del cociente: $h'(x) = \dfrac{2x(x-2) - (x^2+1)\cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}$.

Solución del ejercicio 2

Planteamiento. En una función compuesta distinguimos la función exterior y la interior. La regla de la cadena dice que la derivada es la derivada de la exterior evaluada en la interior, multiplicada por la derivada de la interior; en un producto, se combina con la regla del producto.

a. Exterior $\sin u$, interior $u = x^2$: $\cos(x^2) \cdot 2x$.
b. $\dfrac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
c. $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
d. Producto y cadena: $3e^{3x}\cos x - e^{3x}\sin x = e^{3x}(3\cos x - \sin x)$.

Solución del ejercicio 3

Planteamiento. La recta tangente pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $f'(a)$, y la normal es perpendicular a ella, con pendiente $-\frac{1}{f'(a)}$. Calculamos ambos números y usamos la ecuación punto-pendiente $y - f(a) = m(x - a)$.

a. $f(1) = 1 - 2 = -1$ y $f'(x) = 3x^2 - 2$, luego $f'(1) = 1$.
b. $y - (-1) = 1 \cdot (x - 1)$, es decir $y = x - 2$.
c. La pendiente de la normal es $-1/f'(1) = -1$: $y + 1 = -(x - 1)$, o sea $y = -x$.
d. $3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2/3} \approx \pm 0{,}816$.

Solución del ejercicio 4

Planteamiento. Cuando la variable aparece en la base y en el exponente, tomamos logaritmos para bajar el exponente y derivamos. En una ecuación implícita derivamos ambos miembros respecto de x, recordando que y depende de x, y despejamos y'.

a. $\ln y = x\ln x \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \ln x + 1$, luego $y' = x^x(\ln x + 1)$.

b. Derivamos respecto de x: $2x + 2yy' = 0$, así que $y' = -x/y$. En $(3,4)$ vale $-3/4$.

c. $\ln y = 3\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln x - x$. Derivando: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{2x} - 1$ y $y' = y\left(\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{2x} - 1\right)$.

Solución del ejercicio 5

Planteamiento. Antes de aplicar la regla de L'Hôpital comprobamos que el límite es de tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Derivamos numerador y denominador por separado, nunca como cociente, y repetimos si la indeterminación persiste.

a. Es $\frac{0}{0}$. Derivamos: $\frac{e^x-1}{2x}$, de nuevo $\frac{0}{0}$; otra vez: $\frac{e^x}{2} \to \frac{1}{2}$.

b. Es $\frac{\infty}{\infty}$: $\frac{1/x}{1} = \frac{1}{x} \to 0$.

c. Es $0\cdot(-\infty)$. Escribimos $\frac{\ln x}{1/x}$ y derivamos: $\frac{1/x}{-1/x^2} = -x \to 0$.

d. $\frac{x^2}{e^x}$ es $\frac{\infty}{\infty}$; tras dos derivaciones $\frac{2}{e^x} \to 0$.

Solución del ejercicio 6

Planteamiento. El polinomio de Maclaurin de grado n es $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$. Calculamos las derivadas sucesivas, las evaluamos en 0, dividimos por el factorial correspondiente y escribimos el polinomio con los términos no nulos.

a. Todas las derivadas valen $e^0 = 1$: $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

b. Derivadas en 0: $0, 1, 0, -1$. $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$.

c. Derivadas en 0: $0, 1, -1, 2$. $P_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

d. Derivadas en 0: $1, 0, -1, 0, 1$. $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Solución del ejercicio 7

Planteamiento. La velocidad es la derivada de la posición y la aceleración la derivada de la velocidad. Estudiamos el signo de la velocidad para saber cuándo el coche avanza o retrocede y calculamos la distancia sumando los tramos recorridos en cada sentido.

a. $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ y $a(t) = 6t - 12$.
b. $3t^2 - 12t + 9 = 0 \iff t^2 - 4t + 3 = 0 \iff t = 1$ o $t = 3$ s.
c. $s(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ y $s(3) = 27 - 54 + 27 = 0$. Avanza hasta 4 m, se detiene en $t = 1$, retrocede hasta la salida en $t = 3$ y vuelve a avanzar.
d. $s(5) = 125 - 150 + 45 = 20$, luego la velocidad media es $20/5 = 4$ m/s. La instantánea en $t = 5$ es $v(5) = 75 - 60 + 9 = 24$ m/s, mucho mayor que la media porque el coche acelera al final.

Solución del ejercicio 8

Planteamiento. Es un problema de optimización: expresamos el área en función de una sola variable usando la longitud de valla disponible, derivamos, igualamos a cero y comprobamos con la segunda derivada que el punto crítico es un máximo.

a. El lado paralelo mide $200 - 2x$ y $A(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$.
b. Debe ser $x > 0$ y $200 - 2x > 0$: 0.
c. $A'(x) = 200 - 4x = 0 \Rightarrow x = 50$. Como $A''(x) = -4$, es un máximo.
d. Dimensiones: 50 m por 100 m; área máxima $50 \cdot 100 = 5\,000$ m².

Solución del ejercicio 9

Planteamiento. La restricción del volumen permite escribir la altura en función del radio. Sustituimos en la superficie total, derivamos respecto del radio, buscamos el punto crítico y comprobamos que es un mínimo; al final calculamos todas las medidas.

a. De $\pi r^2 h = 500$ sale $h = \dfrac{500}{\pi r^2}$ y $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{1000}{r}$.
b. $S'(r) = 4\pi r - \dfrac{1000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \dfrac{250}{\pi}$, es decir $r \approx 4{,}30$ cm.
c. $S''(r) = 4\pi + \dfrac{2000}{r^3} > 0$ para $r > 0$: es un mínimo.
d. $h = \dfrac{500}{\pi r^2} \approx 8{,}60$ cm, así que $h = 2r$: la lata óptima tiene la altura igual al diámetro.

Solución del ejercicio 10

Planteamiento. El coste medio es el coste total dividido entre las unidades. Lo derivamos, buscamos el mínimo y comprobamos la propiedad económica clásica: en el mínimo del coste medio, el coste marginal coincide con el coste medio.

a. y $C'(x) = 0{,}03x^2 - 1{,}2x + 13$.
b. . Como , es un mínimo.
c. €/unidad y $C'(30) = 27 - 36 + 13 = 4$ €/unidad.
Coinciden.

d. Cuando el coste medio es mínimo, el coste marginal es igual al coste medio: producir una unidad más cuesta lo mismo que el promedio.

Solución del ejercicio 11

Planteamiento. El teorema del valor medio asegura que en algún instante la velocidad instantánea coincide con la velocidad media del tramo. Calculamos esa velocidad media con la distancia y el tiempo y la comparamos con el límite permitido.

a. $v_m = \dfrac{40\ \text{km}}{1/3\ \text{h}} = 120$ km/h.
b. Existe un instante $c \in (0, \frac{1}{3})$ con $s'(c) = \dfrac{s(1/3) - s(0)}{1/3} = 120$ km/h.
c. No: el teorema garantiza que hubo un instante a exactamente 120 km/h, pero con velocidad media 120 no se puede descartar que en otros instantes superase el límite (y otros bajara de él). Si la media fuese superior a 120, sí podría asegurarse una infracción.
d. s continua en $[0, 1/3]$ y derivable en $(0, 1/3)$.

Solución del ejercicio 12

Planteamiento. La aproximación lineal sustituye la función por su recta tangente cerca de un punto conocido. Elegimos un punto a cercano donde la función sea fácil de evaluar, calculamos $f(a)$ y $f'(a)$ y comparamos la estimación con el valor exacto.

a. $f'(100) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = 0{,}05$. $\sqrt{101} \approx 10 + 0{,}05 \cdot 1 = 10{,}05$ (valor real 10,0499).
b. $f = \ln x$, $f'(1) = 1$: $\ln(1{,}02) \approx 0 + 1 \cdot 0{,}02 = 0{,}02$ (valor real 0,0198).
c. $dV = 3 \cdot 10^2 \cdot 0{,}1 = 30$ cm³.
d. Volumen exacto: $10{,}1^3 - 10^3 = 1030{,}301 - 1000 = 30{,}301$ cm³. El error es $0{,}301$ cm³, un 1 %.

Solución del ejercicio 13

Planteamiento. Evaluamos la ley de enfriamiento en los instantes pedidos y derivamos para obtener la rapidez con que se enfría el café. El signo negativo de la derivada indica enfriamiento, y su módulo decrece a medida que la temperatura se acerca a la del ambiente.

a. $T(0) = 20 + 65 = 85$ °C.
b. $T'(t) = -6{,}5e^{-0{,}1t}$; $T'(5) = -6{,}5e^{-0{,}5} \approx -3{,}94$ °C/min.
c. $20 + 65e^{-0{,}1t} = 40 \iff e^{-0{,}1t} = \frac{20}{65} \iff t = 10 \ln \frac{65}{20} \approx 11{,}8$ min.
d. El límite es 20 °C, la temperatura ambiente. Como T', el café se enfría siempre, cada vez más despacio.

Solución del ejercicio 14

Planteamiento. Seguimos el esquema del estudio de una función: derivada y puntos críticos, signo de f' para la monotonía y los extremos, signo de f'' para la curvatura y los puntos de inflexión, y finalmente un esbozo de la gráfica.

a. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$, con ceros $x = -1$ y $x = 3$.
b. $f' > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ y f' en $(-1, 3)$. Máximo local $f(-1) = 10$ y mínimo local $f(3) = -22$.
c. $f''(x) = 6x - 6$, que se anula en $x = 1$; $f(1) = -6$. Punto de inflexión $(1, -6)$.
d. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$ y hacia arriba en $(1, \infty)$. Como el máximo es positivo y el mínimo negativo, la gráfica corta tres veces el eje x: hay tres raíces reales.

Solución del ejercicio 15

Planteamiento. Estudiamos la concentración como una función completa: dominio, signo, límite en el infinito, crecimiento y decrecimiento con la primera derivada y curvatura con la segunda. Cada resultado se interpreta en términos del medicamento en sangre.

a. $c(0) = 0$ y, por L'Hôpital, $\lim_{t\to\infty} te^{-t} = \lim \frac{t}{e^t} = 0$. Asíntota horizontal $y = 0$.
b. $c'(t) = e^{-t}(1-t)$: positiva para t y negativa para $t > 1$. Máximo en $t = 1$ con $c(1) = e^{-1} \approx 0{,}368$ mg/L.
c. $c''(t) = e^{-t}(t-2)$, que se anula en $t = 2$ con $c(2) = 2e^{-2} \approx 0{,}271$. Cóncava hacia abajo antes y hacia arriba después.
d. La concentración sube rápidamente hasta 0,37 mg/L en 1 hora, después disminuye al principio deprisa y luego cada vez más despacio, tendiendo a 0 sin llegar a anularse.

Solución del ejercicio 16

Planteamiento. Usamos el polinomio de Taylor del seno y acotamos el error con el resto de Lagrange, que depende de la siguiente derivada. Elegimos el grado mínimo que garantiza un error menor que el pedido y comparamos con el valor real.

a. $P_4(x) = P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ (el término de x^4 es nulo), de modo que $P_4(0{,}1) = 0{,}1 - \frac{0{,}001}{6} = 0{,}0998333\ldots$
b. $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5$ para algún c entre 0 y x. Con $|f^{(5)}| \le 1$ resulta $|R_4(0{,}1)| \le \frac{10^{-5}}{120} \approx 8{,}3 \cdot 10^{-8}$.
c. Sí: $8{,}3 \cdot 10^{-8}$. Basta el polinomio de grado 3 (que coincide con el de grado 4), porque el seno es impar y el término siguiente es el de x^5.
d. Hay que lograr $\frac{(0{,}1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Para $n = 6$ vale $\frac{10^{-7}}{5\,040} \approx 2 \cdot 10^{-11}$ (no basta); para $n = 7$

vale $\frac{10^{-8}}{40\,320} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-13}$ (sí basta). Hace falta el grado 7: $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$.

Solución del ejercicio 17

Planteamiento. Escribimos el área de la ventana (rectángulo más semicírculo) en función de una sola variable usando la condición del perímetro. Derivamos, buscamos el máximo y calculamos las dimensiones de la ventana que deja pasar más luz.

a. $h = \dfrac{6 - 2r - \pi r}{2} = 3 - r - \dfrac{\pi r}{2}$.

b. $A(r) = 2r\left(3 - r - \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{\pi r^2}{2} = 6r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2} = 6r - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r^2$.

c. $A'(r) = 6 - (4+\pi)r = 0 \Rightarrow r = \dfrac{6}{4+\pi} \approx 0{,}840$ m. Como $A'' = -(4+\pi)$, es un máximo.

d. $h = 3 - r - \frac{\pi r}{2} \approx 3 - 0{,}840 - 1{,}320 = 0{,}840$ m; es decir, $h = r$. El ancho es $2r \approx 1{,}68$ m y el área máxima es $\frac{18}{4+\pi} \approx 2{,}52$ m².

Solución del ejercicio 18

Planteamiento. Minimizar una distancia equivale a minimizar su cuadrado, que evita derivar raíces. Escribimos la distancia al cuadrado desde el punto a un punto genérico de la curva, derivamos, igualamos a cero y comprobamos que es un mínimo.

a. $D(x) = (x-4)^2 + (\sqrt{x})^2 = x^2 - 8x + 16 + x = x^2 - 7x + 16$.

b. $D'(x) = 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} = 3{,}5$.

c. $D''(x) = 2 > 0$, por tanto es un mínimo (y global, ya que D es una parábola).

d. El punto es $(3{,}5;\ \sqrt{3{,}5}) \approx (3{,}5;\ 1{,}87)$ y $D(3{,}5) = 12{,}25 - 24{,}5 + 16 = 3{,}75$, de modo que la distancia mínima es $\sqrt{3{,}75} \approx 1{,}94$ km.

Solución del ejercicio 19

Planteamiento. Aplicamos el teorema del valor medio a la función adecuada en el intervalo $[a, b]$: el cociente incremental es igual a la derivada en un punto intermedio, y acotando esa derivada se obtiene la desigualdad buscada.

a. Existe $c \in (0, x)$ con $e^x - 1 = e^c \cdot x$. Como $e^c \geq 1$, resulta $e^x - 1 \geq x$.

b. Existe $c \in (0, x)$ con $\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$. Como $1 + c > 1$, resulta $\ln(1+x)$.

c. Con $x = 0{,}02$: $\ln(1{,}02)$ (en efecto, $0{,}0198$). La recta tangente en 0 queda por encima de la curva cóncava.

d. Existe $c \in (0, x)$ con $\sin x - \sin 0 = \cos c \cdot x$. Como $c \in (0, 2\pi)$, se cumple $\cos c$, y por tanto $\sin x$.

Solución del ejercicio 20

Planteamiento. Sustituimos cada función por su desarrollo de Maclaurin hasta el orden necesario para que no se anule el numerador. Simplificamos, dividimos por la potencia de x del denominador y el límite es el coeficiente que queda.

a. El numerador es $\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$; dividiendo por x^3 queda $\frac{1}{6} + \frac{x}{24} + \cdots \to \frac{1}{6}$.

b. El numerador es $\frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots$, luego el cociente tiende a $\frac{1}{24}$.

c. $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \cdots$. Entonces $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{-x^4/3 + \cdots}{x^4 + \cdots} \to -\frac{1}{3}$.