Soluciones del examen - Cálculo en varias variables

Curso: Universidad 1 · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

Criterios. Se valora el gradiente, la normalización del vector dirección y la tasa máxima.

a. $\nabla f = (2xy,\ x^2 + 3y^2)$; en $(1,1)$: $(2,4)$. Derivamos respecto de x tratando y como constante, y al revés: $f_x = 2xy$ y $f_y = x^2 + 3y^2$. En el punto, $f_x(1,1) = 2$ y $f_y(1,1) = 1 + 3 = 4$.

b. $2 \cdot \frac{3}{5} - 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{6-16}{5} = -2$. El vector u ya es unitario, pues $\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$, así que $D_u f = \nabla f \cdot u$. El resultado negativo indica que en esa dirección la función decrece a razón de 2 unidades por unidad de longitud.

c. $\|(2,4)\| = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$. La tasa máxima es el módulo del gradiente y se alcanza en la dirección de ∇f, es decir, de $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

Criterios. Se valora el plano tangente y el cálculo del error de la aproximación lineal.

a. $z_x = e^y = 1$, $z_y = xe^y = 2$: $z = 2 + (x-2) + 2y$. El punto pertenece a la superficie porque $2e^0 = 2$. La fórmula es $z = f(2,0) + f_x(2,0)(x-2) + f_y(2,0)\,y$; simplificando, el plano es $z = x + 2y$.

b. $z \approx 2 + 0{,}1 - 0{,}2 = 1{,}9$. Exacto: $2{,}1e^{-0{,}1} \approx 1{,}900$. Los incrementos son $\Delta x = 0{,}1$ y $\Delta y = -0{,}1$. El valor exacto es $2{,}1 \cdot 0{,}904837 \approx 1{,}90016$, así que el error de la aproximación lineal es de unas dos diezmilésimas, muy pequeño porque el punto está cerca de $(2,0)$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

Criterios. Se valora resolver el sistema del gradiente y aplicar el criterio de la hessiana.

a. $2x + y - 3 = 0$, $x + 2y = 0$: $x = 2$, $y = -1$. Los puntos críticos anulan el gradiente: $f_x = 2x + y - 3$ y $f_y = x + 2y$. De la segunda, $x = -2y$; sustituyendo, $-4y + y = 3$, luego $y = -1$ y $x = 2$. Es el único punto crítico.

b. $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det = 3 > 0$, $f_{xx} > 0$: mínimo, $f(2,-1) = -3$. Las derivadas segundas son constantes: $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2$. Como la hessiana es definida positiva en todo el plano, f es convexa y el mínimo es global. Comprobación: $f(2,-1) = 4 - 2 + 1 - 6 = -3$.

Solución del ejercicio 4 (5 puntos)

Criterios. Se valora el planteamiento de Lagrange, su resolución y la interpretación del multiplicador.

a. Maximizar $A = xy$ con $x + 2y = 24$. Dividiendo la restricción entre 2 se obtiene la forma simplificada.
b. $y = \lambda$, $x = 2\lambda$, $x + 2y = 24$: $4\lambda = 24$, $\lambda = 6$, $x = 12$ m, $y = 6$ m, $A = 72$ m². Las ecuaciones de Lagrange son $\nabla A = \lambda \nabla g$ con $g = x + 2y$: $y = \lambda \cdot 1$ y $x = \lambda \cdot 2$. Comprobación: $12 + 2 \cdot 6 = 24$.
c. Un euro más de presupuesto (medio metro más en $x + 2y$) aumenta el área en unos $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ m².

Solución del ejercicio 5 (3 puntos)

Criterios. Se valora el cálculo ordenado de la integral iterada.

a. $\int_0^3 \int_0^2 xy^2 \, dy \, dx = \int_0^3 x \cdot \frac{8}{3} \, dx = \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{2} = 12$. Integramos primero respecto de y, con x constante: $\int_0^2 xy^2 \, dy = x \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} x$. Después integramos en x: $\frac{8}{3} \int_0^3 x \, dx = \frac{8}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{2}$. Como el integrando es un producto $g(x)h(y)$ sobre un rectángulo, también vale $\left(\int_0^3 x \, dx \right) \left(\int_0^2 y^2 \, dy \right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{8}{3} = 12$; por el teorema de Fubini el orden no importa. Interpretación: el resultado es el volumen bajo la superficie $z = xy^2$ sobre el rectángulo, que tiene área 6; la altura media de la superficie es, por tanto, $12 : 6 = 2$.