Apuntes - Cálculo en varias variables

Curso: Universidad 1

Las funciones de varias variables describen magnitudes que dependen de más de un parámetro: temperatura en un punto del espacio, coste según varios factores, altura de un terreno. Extendemos aquí límite, derivada e integral a $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, con la optimización como aplicación principal.

Actividad de introducción

Un excursionista de los Picos de Europa consulta un mapa topográfico. La altitud depende de dos coordenadas, la distancia hacia el este y hacia el norte, y las líneas de nivel unen puntos de igual altura. ¿En qué dirección sube más deprisa? ¿Dónde está la cima? ¿Cuánta tierra hay en una colina? Para responder hace falta extender las derivadas y las integrales a funciones de varias variables. Las derivadas parciales miden cómo cambia la altitud al moverse en una sola dirección, el gradiente señala la dirección de máxima subida y las integrales dobles suman cantidades repartidas sobre una superficie. Estas herramientas son imprescindibles en física, economía, ingeniería e inteligencia artificial.

Límites y continuidad

Definición: límites y continuidad

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f = L$ exige que el valor se acerque a L por **todos** los caminos. Para probar que no existe basta encontrar dos caminos con límites distintos (por ejemplo $y = 0$ y $y = x$); para probar que existe se acota con el sandwich o se pasa a coordenadas polares. Ejemplo: $\frac{xy}{x^2+y^2}$ vale 0 por $y = 0$ y $\frac{1}{2}$ por $y = x$: no hay límite en el origen. En cambio $\frac{x^2y}{x^2+y^2} \to 0$ porque $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$.

Derivadas parciales y diferenciabilidad

Definición: derivadas parciales y diferenciabilidad

La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ se calcula derivando respecto de x y tratando y como constante. El **gradiente** es $\nabla f = (f_x, f_y)$. Si f es diferenciable (basta que las parciales sean continuas), el plano tangente a $z = f(x,y)$ en (a,b) es $z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$, y la derivada direccional según un vector unitario $\mathbf{u}$ es $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$. El gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento y $|\nabla f|$ es la tasa máxima. Regla de la cadena: $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x x' + f_y y'$. Teorema de Schwarz: si las parciales segundas son continuas, $f_{xy} = f_{yx}$.

Optimización

Propiedad

Los puntos críticos cumplen $\nabla f = 0$. Con la matriz hessiana $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$ y $D = \det H$: si $D > 0$ y $f_{xx} > 0$ hay mínimo local; si $D > 0$ y f_{xx}, máximo local; si D, punto de silla; si $D = 0$ el criterio no decide. Con una restricción $g(x, y) = 0$ se usan los **multiplicadores de Lagrange**: $\nabla f = \lambda \nabla g$ junto con $g = 0$. En un compacto, el máximo y el mínimo absolutos se buscan entre los puntos críticos interiores y los de la frontera.

Integrales dobles

Propiedad

En un rectángulo o en una región descrita por desigualdades, la integral doble se calcula con el teorema de Fubini como integral iterada: $\iint_D f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f \, dy \, dx$. A veces conviene **cambiar el orden** de integración. En coordenadas polares $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ el elemento de área es $r \, dr \, d\theta$ (el jacobiano r no se puede olvidar).

Método: clasificar puntos críticos

1. Resuelve fx = 0 y fy = 0.
2. Calcula la hessiana en cada punto.
3. Mira D = det H y el signo de fxx.
4. Concluye: mínimo, máximo o silla (si D = 0 no se decide).

Ejemplo 1

Para $f = x^3 - 3xy + y^3$: $f_x = 3x^2 - 3y$, $f_y = 3y^2 - 3x$.

Puntos críticos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. En el origen $D = -9$ (silla); en $(1, 1)$ $D = 27 > 0$ y $f_{xx} = 6 > 0$ (mínimo, valor -1).

Ejemplo 2

Máximo de xy con $x + y = 10$: $y = \lambda$, $x = \lambda$, luego $x = y = 5$ y el valor es 25.

Ejemplo 3

$\iint_{x^2+y^2 \le 1} (x^2 + y^2) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2}$.

¡Atención!

Comprobar el límite solo por rectas; olvidar el factor r en polares; concluir con $D = 0$; no comprobar los extremos en la frontera; usar la derivada direccional con un vector no unitario.

Herramientas del cálculo diferencial

Definición: gradiente y derivada direccional

El gradiente de f en un punto es el vector $\nabla f = (f_x, f_y)$. Si f es diferenciable, la derivada en la dirección de un vector unitario u es $D_u f = \nabla f \cdot u$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, esta derivada es máxima cuando u apunta en la dirección del gradiente, y vale entonces $\|\nabla f\|$; es mínima en la dirección opuesta y nula en las direcciones perpendiculares, que son tangentes a la curva de nivel. Por eso el gradiente es siempre perpendicular a las curvas de nivel.

Teorema: regla de la cadena

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable y $x = x(t)$, $y = y(t)$ son derivables, entonces $\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = \nabla f \cdot (x'(t), y'(t))$. Si x e y dependen de dos variables s, t, se aplica la misma fórmula a cada derivada parcial. La regla de la cadena explica cómo cambia una magnitud a lo largo de una trayectoria, por ejemplo la temperatura que siente un dron que vuela a través de una nube.

Propiedad: diferenciabilidad

Una función $f(x, y)$ es diferenciable en un punto si cerca de él se puede aproximar por su plano tangente con un error que tiende a cero más deprisa que la distancia al punto. Toda función diferenciable es continua y tiene derivadas parciales, pero el recíproco es falso. Una condición suficiente muy útil es que las derivadas parciales existan y sean continuas en un entorno del punto; así ocurre con los polinomios, las exponenciales, los senos y cosenos y sus composiciones, siempre que no haya divisiones por cero ni raíces de números negativos. La diferencial $df = f_x\,dx + f_y\,dy$ estima el cambio de f cuando las variables cambian poco, y se utiliza en el laboratorio para propagar los errores de medida.

Observación: por qué funciona el criterio de la hessiana

Cerca de un punto crítico, el desarrollo de Taylor de segundo orden es $f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2\right)$, porque el término del gradiente se anula. El signo del paréntesis decide si se sube o se baja al alejarse del punto, y ese paréntesis es una forma cuadrática cuya matriz es la hessiana. Si sus dos valores propios son positivos, se sube en todas las direcciones y hay un mínimo; si ambos son negativos, un máximo; si tienen signos distintos, un punto de silla. El determinante es

el producto de los valores propios, y por eso basta mirar su signo y el de f_{xx}.

Método: extremos con restricción (Lagrange)

1. Escribe la función objetivo f y la restricción $g(x,y)=c$.
2. Plantea $\nabla f=\lambda\nabla g$ junto con $g(x,y)=c$: tres ecuaciones con tres incógnitas.
3. Elimina λ, normalmente dividiendo las dos primeras ecuaciones.
4. Evalúa f en todas las soluciones y compara; si la restricción es una curva cerrada y acotada, el mayor valor es el máximo y el menor, el mínimo.
5. Interpreta λ: es la variación del óptimo por unidad de aumento de c.

Ejemplo 4

Clasifica los puntos críticos de $f(x,y)=x^2-y^2$.

$\nabla f=(2x,-2y)=0$ solo en $(0,0)$. La hessiana es $\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}$, con determinante -4: punto de silla. A lo largo del eje x es un mínimo y a lo largo del eje y un máximo.

Ejemplo 5

Calcula $\iint_D (x+y)\,dA$ en el triángulo D de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

$D=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$. Integrando primero en y:
$\int_0^1 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx=\int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

Ejemplo 6

Una piscina municipal de Logroño tiene una profundidad $p(x,y)=1+0{,}1x$ m sobre el rectángulo $[0,20]\times[0,10]$. ¿Cuánta agua cabe?

$V=\int_0^{20}\int_0^{10}(1+0{,}1x)\,dy\,dx=10\int_0^{20}(1+0{,}1x)\,dx=10(20+20)=400$ m³, es decir 400 000 litros.

Integrales dobles y cambios de variable

La integral doble $\iint_D f\,dA$ generaliza la integral simple: se divide la región en pequeños rectángulos, se multiplica el valor de f por el área de cada uno y se pasa al límite. Si $f\ge 0$ representa el volumen bajo la superficie; si f es una densidad, la masa; y si $f=1$, el área de la región. El teorema de Fubini permite calcularla como dos integrales simples sucesivas, en el orden que convenga. Elegir bien el orden es importante: con un orden la integral puede ser imposible de calcular y con el otro, inmediata. Cuando la región o la función tienen simetría circular conviene pasar a coordenadas polares, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, sin olvidar que el elemento de área se transforma en $dA=r\,dr\,d\theta$; ese factor r es el valor absoluto del determinante jacobiano del cambio de variables. Con estas

herramientas se calculan masas, centros de gravedad, momentos de inercia de piezas mecánicas, volúmenes de embalses a partir de su batimetría o la probabilidad de que dos variables aleatorias continuas caigan en una región.

¡Atención!

Que existan las derivadas parciales en un punto no garantiza que la función sea continua ni diferenciable allí. Para estudiar un límite doble no basta con unas cuantas rectas: pueden coincidir y el límite no existir. En el criterio de la hessiana, si el determinante es nulo el criterio no decide. Y en polares, olvidar el factor r es el error más frecuente.

¿Sabías que?

El método de los multiplicadores lo publicó Joseph-Louis Lagrange en 1788, en su Mecánica analítica. Hoy el descenso por el gradiente, que consiste en dar pequeños pasos en la dirección de $-\nabla f$, es el algoritmo con el que se entrenan las redes neuronales: se busca el mínimo de una función de error que depende de millones de variables. En cada paso se calcula el gradiente del error y se corrigen todos los parámetros a la vez en la dirección que más lo reduce, de modo que el cálculo diferencial de varias variables está detrás de los traductores automáticos y de los asistentes de voz que usamos cada día.

El consejo de Otto

si una integral doble parece difícil, dibuja la región. A menudo cambiar el orden o pasar a polares la convierte en una integral sencilla.