Ejercicios - Cálculo en varias variables

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Dominio y curvas de nivel

Para funciones de dos variables, el dominio es una región del plano y las curvas de nivel $f(x,y)=k$ son como las líneas de un mapa topográfico.

a. Halla y dibuja el dominio de $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.
b. Halla el dominio de $g(x,y)=\ln(x-y)$.
c. Describe las curvas de nivel de $h(x,y)=x^2+y^2$ para $k=1,4,9$.
d. ¿Qué superficie es la gráfica de f del apartado a)?

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Límites dobles

Para que exista $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, el valor debe ser el mismo por cualquier camino.

a. Estudia $\lim \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ a lo largo de las rectas $y=mx$.
b. Demuestra que $\lim \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$ usando coordenadas polares.
c. Estudia $\lim \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
d. ¿Basta comprobar todas las rectas para asegurar que un límite existe? Piensa en $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ por la parábola $y=x^2$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Derivadas parciales

Sea $f(x,y)=x^3y^2-2xy+e^{xy}$.

a. Calcula f_x y f_y.
b. Calcula f_{xx}, f_{yy} y las derivadas cruzadas f_{xy}, f_{yx}.
c. Comprueba el teorema de Schwarz.
d. Evalúa el gradiente en $(1,0)$.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Gradiente y derivada direccional

Sea $f(x, y) = x^2 + 3xy$ y el punto $P = (1, 2)$.

a. Calcula $\nabla f(P)$.
b. Calcula la derivada direccional en la dirección de $v = (3, 4)$.
c. ¿En qué dirección crece f más rápido y con qué rapidez?
d. ¿En qué direcciones la derivada direccional es nula?

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Plano tangente y aproximación lineal

Sea la superficie $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

a. Escribe la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 2, 5)$.
b. Usa la aproximación lineal para estimar $f(1{,}1;\ 1{,}9)$.
c. Calcula el valor exacto y el error.
d. Escribe un vector normal a la superficie en ese punto.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Regla de la cadena

Sea $z = x^2 y$ con $x = \cos t$ e $y = \sin t$.

a. Escribe la regla de la cadena $\frac{dz}{dt} = z_x \frac{dx}{dt} + z_y \frac{dy}{dt}$.
b. Calcula $\frac{dz}{dt}$.
c. Comprueba el resultado sustituyendo primero y derivando después.
d. Calcula $\frac{dz}{dt}$ en $t = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Una placa metálica caliente

En un taller de Sagunto, la temperatura (en °C) de una placa metálica es $T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2$ (en cm). Una hormiga está en el punto $(3, 1)$.

a. ¿Qué temperatura hay en la posición de la hormiga?
b. Calcula $\nabla T(3, 1)$.
c. ¿En qué dirección debe moverse para enfriarse lo más rápido posible? ¿A qué ritmo baja la temperatura?
d. ¿En qué direcciones se mueve sin cambiar de temperatura?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Subida a un pico de Sierra Nevada

Cerca de un pico de Sierra Nevada, la altitud (en m) se modela con $h(x, y) = 3000 - 0{,}0001x^2 - 0{,}0002y^2$, con x hacia el este e y hacia el norte (en m). Un montañero está en $(100, 50)$.

a. ¿A qué altitud está?
b. Calcula el gradiente y la dirección de máxima pendiente de subida.
c. Calcula la pendiente si camina hacia el noreste, $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.
d. ¿Qué ángulo de inclinación tiene la máxima pendiente? ¿Es apta para senderismo?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Una caja sin tapa

Una empresa de embalajes de Ourense fabrica cajas sin tapa de 32 litros (32 dm³) y quiere gastar el mínimo cartón. La base mide $x \times y$ y la altura es z (en dm).

a. Escribe la superficie S y expresa z en función de x e y.
b. Escribe $S(x, y)$ y calcula sus derivadas parciales.
c. Halla el punto crítico.
d. Calcula las dimensiones óptimas y el cartón necesario. ¿Por qué es un mínimo?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – El beneficio de una heladería

Una heladería de Alicante vende helados de dos tamaños. Si vende x cientos de pequeños e y cientos de grandes al mes, su beneficio (en euros) es $B(x, y) = -x^2 - y^2 + xy + 60x + 30y$.

a. Calcula las derivadas parciales.
b. Halla el punto crítico.
c. Clasifícalo con la matriz hessiana.
d. ¿Cuál es el beneficio máximo?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El huerto junto a una tapia

Un vecino de un pueblo de Cuenca quiere vallar un huerto rectangular junto a una tapia, de modo que solo necesita valla en tres lados. Tiene 40 m de valla: $2x + y = 40$, donde y es el lado paralelo a la tapia.

a. Escribe la función a maximizar y la restricción.
b. Plantea las ecuaciones de Lagrange $\nabla A = \lambda \nabla g$.

c. Resuélvelas.
d. Comprueba el resultado despejando y y derivando en una variable. ¿Qué significa el multiplicador?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Producción en una fábrica de muebles

Una fábrica de Valencia produce $Q(K, L) = 10\sqrt{KL}$ unidades con K horas de máquina y L horas de trabajo. La hora de máquina cuesta 20 € y la de trabajo 5 €, y el presupuesto diario es de 400 €.

a. Escribe la restricción presupuestaria.
b. Usa los multiplicadores de Lagrange para maximizar la producción.
c. Calcula la producción máxima.
d. Comprueba que en el óptimo se gasta lo mismo en máquinas que en trabajo y explica por qué.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El volumen de una lata

Una conservera de Vigo fabrica latas cilíndricas de radio $r = 3$ cm y altura $h = 10$ cm, con errores de fabricación de hasta $0{,}05$ cm en el radio y $0{,}1$ cm en la altura.

a. Calcula el volumen nominal $V = \pi r^2 h$.
b. Escribe la diferencial $dV = V_r\,dr + V_h\,dh$.
c. Estima el error máximo del volumen.
d. ¿Qué error influye más? ¿Qué medida conviene controlar mejor?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – El centro de masas de una losa

Una losa de hormigón de una obra de Toledo ocupa el rectángulo $[0, 2] \times [0, 1]$ (en metros), pero el espesor varía y su densidad superficial es $\rho(x, y) = x + y$ (en toneladas por m²).

a. Calcula la masa $m = \iint \rho\, dA$.
b. Calcula $\bar{x} = \frac{1}{m} \iint x\rho\, dA$.
c. Calcula $\bar{y} = \frac{1}{m} \iint y\rho\, dA$.
d. Compara con el centro geométrico $(1;\, 0{,}5)$ y explica la diferencia.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: clasificar puntos críticos

Sea $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Esta superficie, que tiene la forma de una silla de montar

cerca del origen, es un ejemplo clásico para practicar el criterio de la hessiana.

a. Calcula el gradiente y halla los puntos críticos reales.
b. Calcula la matriz hessiana.
c. Clasifica cada punto crítico.
d. ¿Tiene f máximo o mínimo absoluto en $\mathbb{R}^2$? Justifica estudiando $f(x, 0)$.
e. Halla el mínimo de f en el cuadrado $[0, 2] \times [0, 2]$ sabiendo que en el borde $f \geq -1$ no se alcanza un valor menor.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: extremos absolutos en un disco

La temperatura de una sartén circular de radio 2 dm de un restaurante de Valencia, tras apagar el fuego, se modela con $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ (en grados por encima de la del ambiente) en el disco $x^2 + y^2 \leq 4$. Busca los puntos más fríos y más calientes.

a. Halla los puntos críticos en el interior y su valor.
b. En el borde, $x^2 + y^2 = 4$. Escribe f en función de x solo, con $x \in [-2, 2]$.
c. Halla los extremos de f en el borde.
d. Compara todos los candidatos y da el máximo y el mínimo absolutos.
e. ¿Por qué el teorema de Weierstrass garantiza que existen?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: cambiar el orden de integración

Se quiere calcular $I = \int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\, dy\, dx$. La función e^{y^2} no tiene primitiva elemental, así que hay que cambiar el orden.

a. Dibuja la región de integración.
b. Describe la región con y como variable exterior.
c. Calcula la integral.
d. Da el valor numérico y comprueba que es razonable acotando e^{y^2} entre 1 y e.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: el montón de sal de una salina

En una salina de Torrevieja la sal se amontona con forma de paraboloide: la altura sobre el punto (x, y) es $z = 4 - x^2 - y^2$ (en metros), sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.

a. Escribe el volumen como integral doble.
b. Pasa a coordenadas polares (recuerda el factor r).
c. Calcula el volumen.
d. Compara con el de un cono de la misma base y altura.
e. Si la sal tiene una densidad de 1,2 t/m³, ¿cuántas toneladas hay?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: la recta de mínimos cuadrados

Un estudiante de Ciencias Ambientales de Huesca mide la altura (en cm) de una planta durante tres semanas: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$. Busca la recta $y = ax + b$ que minimiza la suma de los cuadrados de los errores, $S(a, b) = \sum (y_i - ax_i - b)^2$.

a. Escribe $S(a, b)$.
b. Calcula S_a y S_b e iguálalas a 0.
c. Resuelve el sistema.
d. Comprueba que es un mínimo con la hessiana.
e. Predice la altura en la semana 5 y comenta la fiabilidad.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: derivadas parciales y continuidad

Sea $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$.

a. Calcula $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ con la definición.
b. Demuestra que f no es continua en $(0, 0)$.
c. ¿Qué enseña este ejemplo sobre la relación entre derivadas parciales y diferenciabilidad?
d. Una función es armónica si $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Comprueba que $x^2 - y^2$ y $e^x \sin y$ lo son.