Soluciones - Cálculo en varias variables

Curso: Universidad 1

Solución del ejercicio 1

Planteamiento. El dominio está formado por los puntos donde la expresión tiene sentido: radicandos no negativos y argumentos de logaritmos positivos. Las curvas de nivel se obtienen igualando la función a una constante y reconociendo la curva.

a. Hace falta $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, es decir $x^2 + y^2 \leq 4$: el disco cerrado de centro el origen y radio 2.
b. Hace falta $x - y > 0$: el semiplano abierto por debajo de la recta $y = x$.
c. Circunferencias centradas en el origen de radios 1, 2 y 3. Al ser cada vez más juntas en altura, la superficie (un paraboloide) es cada vez más empinada.
d. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cumple $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$: la semiesfera superior de radio 2.

Solución del ejercicio 2

Planteamiento. Si el límite existe, debe valer lo mismo por cualquier camino. Probar rectas $y = mx$ sirve para demostrar que no existe; para demostrar que existe pasamos a polares y acotamos la expresión por algo que tienda a 0.

a. Por $y = mx$: $\frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}$, que depende de m. El límite no existe.
b. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$: $\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta\sin\theta$, y $|r\cos^2\theta\sin\theta| \leq r \to 0$. El límite es 0.
c. Por $y = mx$ da $\frac{1-m^2}{1+m^2}$: 1 por el eje x y -1 por el eje y. No existe.
d. No. Por las rectas $y = mx$ el límite es 0, pero por $y = x^2$ vale $\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$. No existe.

Solución del ejercicio 3

Planteamiento. Para derivar parcialmente respecto de una variable tratamos la otra como constante. Calculamos las derivadas de primer y segundo orden y comprobamos que las cruzadas coinciden, como asegura el teorema de Schwarz.

a. $f_x = 3x^2y^2 - 2y + ye^{xy}$ y $f_y = 2x^3y - 2x + xe^{xy}$.
b. $f_{xx} = 6xy^2 + y^2e^{xy}$; $f_{yy} = 2x^3 + x^2e^{xy}$; $f_{xy} = 6x^2y - 2 + e^{xy} + xye^{xy}$.
c. Derivando f_y respecto de x: $6x^2y - 2 + e^{xy} + xye^{xy}$, igual que f_{xy}.
d. $\nabla f(1,0) = (0,\ -2+1) = (0,-1)$.

Solución del ejercicio 4

Planteamiento. El gradiente reúne las derivadas parciales. La derivada direccional es el producto escalar del gradiente por un vector unitario, de modo que hay que normalizar la dirección; la máxima tasa de crecimiento es el módulo del gradiente.

a. $\nabla f = (2x + 3y,\ 3x)$; $\nabla f(1, 2) = (8, 3)$.
b. Unitario $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$: $D_u f = 8 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{5} = 7{,}2$.
c. En la del gradiente, $(8, 3)$, con rapidez $\|\nabla f\| = \sqrt{73} \approx 8{,}54$.
d. En las perpendiculares al gradiente: $\pm\frac{1}{\sqrt{73}}(-3, 8)$, tangentes a la curva de nivel.

Solución del ejercicio 5

Planteamiento. El plano tangente es la aproximación lineal de la superficie en el punto: usa las derivadas parciales como pendientes. Con él estimamos valores cercanos y comparamos con el valor exacto para ver el error.

a. $f_x = 2x = 2$, $f_y = 2y = 4$: $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$.
b. $z \approx 5 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot (-0{,}1) = 4{,}8$.
c. $1{,}21 + 3{,}61 = 4{,}82$; error $0{,}02$.
d. $(f_x, f_y, -1) = (2, 4, -1)$.

Solución del ejercicio 6

Planteamiento. La regla de la cadena combina las derivadas parciales de z con las derivadas de $x(t)$ e $y(t)$. Comprobamos el resultado sustituyendo primero y derivando después, y evaluamos en el instante pedido.

a. $z_x = 2xy$, $z_y = x^2$, $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$.
b. $\frac{dz}{dt} = 2xy(-\sin t) + x^2 \cos t = -2\cos t \sin^2 t + \cos^3 t$.
c. $z = \cos^2 t \sin t$; $z' = -2\cos t \sin t \cdot \sin t + \cos^2 t \cos t$, lo mismo.
d. $-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \approx -0{,}354$.

Solución del ejercicio 7

Planteamiento. El gradiente de la temperatura señala la dirección en que más aumenta; para enfriarse lo antes posible hay que moverse en sentido opuesto. Las direcciones perpendiculares al gradiente mantienen la temperatura constante.

a. $T(3, 1) = 100 - 9 - 2 = 89$ °C.
b. $\nabla T = (-2x, -4y)$; en $(3, 1)$: $(-6, -4)$.
c. En la de $-\nabla T = (6, 4)$, alejándose del centro; la temperatura baja a $\sqrt{52} \approx 7{,}21$ °C por cm.
d. Perpendiculares al gradiente: $\pm(2, -3)/\sqrt{13}$, tangentes a la elipse de nivel $x^2 + 2y^2 = 11$.

Solución del ejercicio 8

Planteamiento. Evaluamos la altitud, calculamos el gradiente en la posición del montañero y lo interpretamos: apunta hacia la máxima subida. La derivada direccional da la pendiente en otra dirección y el módulo del gradiente, la pendiente máxima.

a. $h(100, 50) = 3000 - 1 - 0{,}5 = 2998{,}5$ m.
b. $\nabla h = (-0{,}0002x,\ -0{,}0004y) = (-0{,}02;\ -0{,}02)$. La subida máxima es en la dirección $(-1, -1)$, hacia el suroeste, es decir hacia la cima, situada en el origen.
c. $D_u h = \frac{-0{,}02-0{,}02}{\sqrt{2}} \approx -0{,}028$: hacia el noreste baja unos 2,8 m por cada 100 m recorridos.
d. $\|\nabla h\| = 0{,}02\sqrt{2} \approx 0{,}028$, una pendiente del 2,8 %, de unos 1,6°: un paseo muy cómodo.

Solución del ejercicio 9

Planteamiento. Usamos la restricción del volumen para eliminar una variable y obtener la superficie en función de dos. Buscamos el punto crítico igualando a cero las derivadas parciales y lo clasificamos con la matriz hessiana.

a. $S = xy + 2xz + 2yz$ y $xyz = 32$, luego $z = \frac{32}{xy}$.
b. $S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$; $S_x = y - \frac{64}{x^2}$ y $S_y = x - \frac{64}{y^2}$.
c. $yx^2 = 64$ y $xy^2 = 64$; dividiendo, $x = y$, y entonces $x^3 = 64$: $x = y = 4$.
d. $z = \frac{32}{16} = 2$ dm; $S = 16 + 16 + 16 = 48$ dm². Es mínimo: la hessiana en $(4, 4)$ es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, con determinante $3 > 0$ y $S_{xx} = 2 > 0$.

Solución del ejercicio 10

Planteamiento. Los puntos críticos anulan las dos derivadas parciales. Resolvemos el sistema lineal resultante y usamos el criterio de la hessiana (determinante y signo de B_{xx}) para comprobar que es un máximo.

a. $B_x = -2x + y + 60$ y $B_y = -2y + x + 30$.
b. De la primera, $y = 2x - 60$; en la segunda: $-4x + 120 + x + 30 = 0$, $x = 50$, $y = 40$.
c. $H = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$: $\det H = 3 > 0$ y B_{xx}: máximo.
d. $B(50, 40) = 2100$ €, vendiendo 5000 helados pequeños y 4000 grandes.

Solución del ejercicio 11

Planteamiento. Con el método de Lagrange planteamos $\nabla A = \lambda \nabla g$ junto con la restricción. Eliminando λ obtenemos la relación entre los lados, y el multiplicador indica cuánto aumenta el área por cada metro adicional de valla.

a. Maximizar $A = xy$ con $g(x, y) = 2x + y = 40$.
b. $y = 2\lambda$, $x = \lambda$, $2x + y = 40$.
c. $y = 2x$, $4x = 40$: $x = 10$ m, $y = 20$ m, $A = 200$ m², $\lambda = 10$.
d. $A = x(40 - 2x)$, $A' = 40 - 4x = 0$, $x = 10$. $\lambda = 10$ indica que cada metro más de valla aumentaría el área máxima en unos 10 m².

Solución del ejercicio 12

Planteamiento. Maximizamos la producción con la restricción presupuestaria mediante multiplicadores de Lagrange. Dividiendo las dos primeras ecuaciones eliminamos λ y obtenemos la proporción óptima entre capital y trabajo.

a. $20K + 5L = 400$.
b. $\frac{5L}{\sqrt{KL}} = 20\lambda$ y $\frac{5K}{\sqrt{KL}} = 5\lambda$. Dividiendo: $\frac{L}{K} = 4$, $L = 4K$. Sustituyendo: $40K = 400$, $K = 10$, $L = 40$.
c. $Q = 10\sqrt{400} = 200$ unidades.
d. $20 \cdot 10 = 200$ € y $5 \cdot 40 = 200$ €. Con exponentes iguales ($\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$), la función Cobb-Douglas reparte el presupuesto a partes iguales.

Solución del ejercicio 13

Planteamiento. La diferencial total estima el cambio del volumen a partir de pequeños errores en las medidas. Cada término es una derivada parcial multiplicada por el error correspondiente, y comparándolos vemos qué medida influye más.

a. $V = 90\pi \approx 282{,}7$ cm³.
b. $dV = 2\pi rh\,dr + \pi r^2 dh$.
c. $|dV| \le 2\pi \cdot 30 \cdot 0{,}05 + \pi \cdot 9 \cdot 0{,}1 = 3\pi + 0{,}9\pi = 3{,}9\pi \approx 12{,}25$ cm³ (un 4,3 %).
d. El del radio aporta 3π frente a $0{,}9\pi$: hay que controlar mejor el radio, porque el volumen depende de su cuadrado.

Solución del ejercicio 14

Planteamiento. La masa es la integral doble de la densidad, y las coordenadas del centro de masas son momentos divididos entre la masa. En un rectángulo integramos primero en una variable y después en la otra (teorema de Fubini).

a. $\int_0^2 \int_0^1 (x + y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = 2 + 1 = 3$ t.
b. $\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + xy)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)dx = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$; $\bar{x} = \frac{11}{9} \approx 1{,}22$ m.
c. $\int_0^2 \int_0^1 (xy + y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)dx = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; $\bar{y} = \frac{5}{9} \approx 0{,}56$ m.
d. El centro de masas está desplazado hacia la esquina $(2, 1)$, donde la losa es más densa.

Solución del ejercicio 15

Planteamiento. Buscamos los puntos críticos resolviendo el sistema del gradiente nulo, calculamos la hessiana y la evaluamos en cada punto. El signo del determinante y de f_{xx} decide si es mínimo, máximo o punto de silla.

a. $f_x = 3x^2 - 3y$, $f_y = 3y^2 - 3x$. De $y = x^2$ y $x = y^2$: $x^4 = x$, $x = 0$ o $x = 1$. Puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.
b. $H = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.
c. En $(0,0)$: $\det H = -9$, punto de silla. En $(1,1)$: $\det H = 27 > 0$ y $f_{xx} = 6 > 0$, mínimo local con $f(1,1) = -1$.
d. No: $f(x,0) = x^3$ toma todos los valores reales, así que no hay extremos absolutos.
e. El mínimo absoluto en el cuadrado es -1, en $(1,1)$.

Solución del ejercicio 16

Planteamiento. En una región cerrada y acotada, los extremos absolutos están en los puntos críticos interiores o en el borde. Estudiamos el interior con el gradiente y el borde reduciendo la función a una variable, y comparamos todos los valores.

a. $f_x = 2x - 2 = 0$, $f_y = 2y = 0$: $(1,0)$, con $f = -1$.
b. $f = 4 - 2x$.
c. Es decreciente: máximo en $x = -2$ (punto $(-2,0)$, $f = 8$) y mínimo en $x = 2$ (punto $(2,0)$, $f = 0$).
d. Máximo absoluto 8 en $(-2,0)$; mínimo absoluto -1 en $(1,0)$.
e. Porque f es continua y el disco es cerrado y acotado (compacto).

Solución del ejercicio 17

Planteamiento. Si una integral iterada no se puede calcular en un orden, dibujamos la región y la describimos con el otro orden. Así aparece un factor que permite un cambio de variable sencillo y calcular la integral.

a. Es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$: $0 \le x \le y \le 1$.
b. $0 \le y \le 1$ y $0 \le x \le y$.
c. $I = \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 y e^{y^2}\,dy = \left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$.
d. $I \approx 0{,}859$. El área del triángulo es $\frac{1}{2}$, así que $\frac{1}{2} \le I \le \frac{e}{2} \approx 1{,}36$. Correcto.

Solución del ejercicio 18

Planteamiento. El volumen bajo una superficie es una integral doble. Como la región es un círculo, pasamos a coordenadas polares sin olvidar el factor r del jacobiano, y comparamos el resultado con un cono de la misma base y altura.

a. $V = \iint_{x^2+y^2\le 4} (4 - x^2 - y^2)\, dA$.
b. $V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$.
c. $2\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi \approx 25{,}1$ m³.
d. Cono: $\frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 4 = \frac{16\pi}{3} \approx 16{,}8$ m³; el paraboloide tiene 1,5 veces más volumen.
e. $1{,}2 \cdot 8\pi \approx 30{,}2$ t.

Solución del ejercicio 19

Planteamiento. La recta de mínimos cuadrados minimiza la suma de los cuadrados de los errores. Derivamos respecto de los dos coeficientes, resolvemos el sistema lineal resultante y comprobamos con la hessiana que es un mínimo.

a. $S = (2 - a - b)^2 + (3 - 2a - b)^2 + (5 - 3a - b)^2$.
b. $S_a = -2[(2 - a - b) + 2(3 - 2a - b) + 3(5 - 3a - b)] = 0$ y $S_b = -2[(2 - a - b) + (3 - 2a - b) + (5 - 3a - b)] = 0$, es decir $14a + 6b = 23$ y $6a + 3b = 10$.
c. Restando el doble de la segunda: $2a = 3$, $a = \frac{3}{2}$; $b = \frac{10-9}{3} = \frac{1}{3}$. Recta $y = 1{,}5x + 0{,}33$.
d. $H = \begin{pmatrix} 28 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$, $\det H = 24 > 0$ y $S_{aa} > 0$: mínimo.
e. $y(5) = 7{,}5 + 0{,}33 \approx 7{,}83$ cm. Con solo tres datos, la extrapolación es poco fiable.

Solución del ejercicio 20

Planteamiento. Calculamos las derivadas parciales en el origen con la definición de derivada y estudiamos la continuidad por un camino concreto. Para las funciones armónicas calculamos las segundas derivadas y comprobamos que su suma es nula.

a. $f(h, 0) = 0$, luego $f_x(0,0) = \lim \frac{0-0}{h} = 0$; igualmente $f_y(0,0) = 0$.
b. Por $y = x$, $f(x, x) = \frac{1}{2} \not\to 0$.
c. Existir las parciales no basta para ser diferenciable, ni siquiera continua. Hace falta, por ejemplo, que las parciales sean continuas.
d. $2 - 2 = 0$; y $e^x \sin y - e^x \sin y = 0$.