# Soluciones del examen - Aplicaciones lineales

Curso: Universidad 1 · Duración: 90 minutos · /20

## Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

**Criterios.** Se valora el rango, la resolución del sistema homogéneo y la ecuación implícita de la imagen.

a. ; $F_3 = F_2 - F_1$, rango 2. El rango coincide con la dimensión de la imagen. Como $F_3 = F_2 - F_1$, el determinante es 0 y el rango no llega a 3; las dos primeras filas no son proporcionales, así que es 2.

b. Restando: $3y - 3z = 0$, $y = z$; $x = y - 2z = -z$. $\ker f = \langle(-1, 1, 1)\rangle$. El núcleo es el conjunto de soluciones de $AX = 0$. Por el teorema de la dimensión, $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$, coherente con un único generador. Comprobación: $f(-1, 1, 1) = (-1 - 1 + 2,\ -2 + 1 + 1,\ -1 + 2 - 1) = (0, 0, 0)$.

c. Columnas 1 y 2: $\{(1, 2, 1), (-1, 1, 2)\}$. Ecuación: , es decir $x - y + z = 0$. Comprobación: $(1, 2, 1)$ cumple $1 - 2 + 1 = 0$ y $(-1, 1, 2)$ cumple $-1 - 1 + 2 = 0$.

## Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

**Criterios.** Se valora el orden correcto del producto de matrices y el cálculo de la inversa.

a. $GF = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $FG = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz de $f$ es $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la de $g$ es $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En $g \circ f$ se aplica primero $f$, por eso su matriz es el producto $GF$ en ese orden. Las dos matrices son distintas: la composición no es conmutativa.

b. $\det(GF) = 2$; $(GF)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. En una matriz $2 \times 2$ se intercambian los elementos de la diagonal principal, se cambia el signo de los otros dos y se divide entre el determinante: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comprobación con la primera fila de $GF$: $2 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot (-\frac{1}{2}) = 1$ y $2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0$.

## Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

**Criterios.** Se valora expresar las imágenes en la nueva base y escribir la matriz diagonal.

a. $f(1,1) = (3,3) = 3(1,1)$ y $f(1,-1) = (1,-1)$. Se multiplica $A$ por cada vector columna: $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ y $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Cada vector de $B$ se transforma en un múltiplo de sí mismo: son vectores propios, de valores 3 y 1.

b. $A_B = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$. Las columnas de $A_B$ son las coordenadas de las imágenes en la base $B$: $f(1,1) = 3(1,1) + 0(1,-1)$ y $f(1,-1) = 0(1,1) + 1(1,-1)$. Como $A_B = P^{-1}AP$, se conservan la traza ($4 = 3 + 1$) y el determinante ($3 = 3 \cdot 1$).

## Solución del ejercicio 4 (5 puntos)

**Criterios.** Se valora la matriz de la proyección, su interpretación y la justificación de la no inyectividad.

a. . Las columnas son las imágenes de los vectores canónicos: $e_1$ y $e_2$ quedan igual y $e_3$ va al vector nulo.

b. $\ker p = \langle(0,0,1)\rangle$ (la vertical) e $\operatorname{Im} p$ el plano $z = 0$ (el suelo).

c. $P^2 = P$ porque la sombra de la sombra es ella misma. Algebraicamente, $P^2$ es diagonal con elementos $1^2, 1^2, 0^2$, así que coincide con $P$.

d. Ambos dan $(3,4,0)$: su diferencia $(0,0,15)$ está en el núcleo.

## Solución del ejercicio 5 (3 puntos)

**Criterios.** Se valora usar la linealidad para obtener las imágenes de la base canónica.

a. $(1,0) = \frac{1}{2}[(1,1) + (1,-1)]$: $f(1,0) = (2,2)$; $(0,1) = \frac{1}{2}[(1,1) - (1,-1)]$: $f(0,1) = (1,-1)$. $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$. Usamos la linealidad:
$f(1,0) = \frac{1}{2}[f(1,1) + f(1,-1)] = \frac{1}{2}(4,4)$ y
$f(0,1) = \frac{1}{2}[f(1,1) - f(1,-1)] = \frac{1}{2}(2,-2)$. Las columnas de $A$ son $f(1,0)$ y $f(0,1)$. Comprobación: $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. La clave es expresar cada vector canónico como combinación de los vectores donde conocemos la imagen; una aplicación lineal queda determinada por las imágenes de una base.

b. $f(5,1) = (11,9)$. Por linealidad,
$f(5,1) = 5f(1,0) + f(0,1) = 5(2,2) + (1,-1) = (11,9)$, que coincide con el producto $A\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$. El vector $(5,1)$ se puede escribir también como $3(1,1) + 2(1,-1)$, y entonces $3(3,1) + 2(1,3) = (11,9)$, el mismo resultado.