Apuntes - Aplicaciones lineales

Curso: Universidad 1

Una aplicación lineal conserva las operaciones del espacio vectorial. Todas las transformaciones geométricas «sin deformar» (giros, proyecciones, simetrías, homotecias) son lineales, y se estudian con matrices. Aquí vemos su definición, el núcleo y la imagen, su matriz asociada y el cambio de base.

Actividad de introducción

Cuando un programa de diseño gira, amplía o inclina una imagen, cada píxel cambia de posición siguiendo una regla. Si la regla respeta las sumas y los productos por números, basta saber qué les ocurre a dos vectores, los de la base, para conocer el destino de todos los demás. Así, una transformación de una imagen de millones de píxeles se guarda en una pequeña tabla de cuatro números. Estas transformaciones, que se llaman aplicaciones lineales, aparecen también al derivar polinomios, al proyectar sombras, al filtrar señales o al calcular los nutrientes de una receta. En este tema veremos cómo se representan con matrices, qué información dan su núcleo y su imagen y cómo cambia la matriz al cambiar de base.

Definición y propiedades

Definición: definición y propiedades

Una aplicación $T : V \to W$ entre espacios vectoriales es **lineal** si $T(u+v) = T(u) + T(v)$ y $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ para todo u, v y todo escalar λ. En particular $T(0) = 0$: si una aplicación no cumple esto, no es lineal (por eso $(x, y) \mapsto (x+1, y)$ no lo es). Una aplicación lineal queda determinada por las imágenes de los vectores de una base.

Núcleo e imagen

Definición: núcleo e imagen

El **núcleo** es $\ker T = \{v \in V : T(v) = 0\}$ y la **imagen** es $\operatorname{Im} T = \{T(v) : v \in V\}$. Ambos son subespacios (del origen y del destino, respectivamente). T es inyectiva si y solo si $\ker T = \{0\}$ y es sobreyectiva si $\operatorname{Im} T = W$. **Teorema de la dimensión (rango-nulidad):** $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$.

Matriz asociada

Propiedad

Fijadas bases B de V y B' de W, la **matriz asociada** A tiene por columnas las

coordenadas de $T(b_j)$ en B', y cumple $[T(v)]_{B'} = A[v]_B$. Con la base canónica, $T(x) = Ax$. El núcleo es el conjunto de soluciones de $Ax = 0$ y la imagen está generada por las columnas, luego $\dim \operatorname{Im} T = \operatorname{rg} A$. La composición corresponde al producto de matrices: $S \circ T \leftrightarrow A_S A_T$ (el orden importa). T es biyectiva si y solo si A es cuadrada con $\det A \neq 0$, y entonces la matriz de T^{-1} es A^{-1}.

Cambio de base

Propiedad

Si A es la matriz de un endomorfismo en la base canónica y P tiene por columnas la base B, la matriz en B es $A_B = P^{-1}AP$. Son matrices **semejantes**: representan la misma aplicación y comparten determinante, traza y rango.

Método: hallar núcleo e imagen

1. Escribe la matriz de la aplicación en bases dadas.
2. Resuelve Ax = 0: eso da el núcleo.
3. Las columnas de A generan la imagen; elige las independientes.
4. Comprueba dim núcleo + dim imagen = dim del origen.

Ejemplo 1

Sea $T(x, y, z) = (x + y,\ y - z)$.

Su matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. El núcleo cumple $x = -y,\ z = y$, es decir $\ker T = \langle (-1, 1, 1) \rangle$ (dimensión 1); por rango-nulidad la imagen tiene dimensión 2 y es todo $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2

Con el giro de 90°, $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene $R^2 = -I$: dos giros de 90° dan un giro de 180°.

Ejemplo 3

Sea $T(x, y) = (x, y, x + y)$.

El núcleo es $\{0\}$ (inyectiva), la imagen es el plano $z = x + y$ de dimensión 2, y no es sobreyectiva sobre $\mathbb{R}^3$.

¡Atención!

Colocar las coordenadas de las imágenes como filas en lugar de columnas; olvidar comprobar $T(0) = 0$; invertir el orden al componer; confundir núcleo (subespacio del origen) con imagen (del destino); aplicar rango-nulidad con la dimensión del destino en vez de la del origen.

Más sobre aplicaciones lineales

Teorema: de la dimensión (rango-nulidad)

Si $f : V \to W$ es lineal y V tiene dimensión finita, entonces $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$. El número $\dim \operatorname{Im} f$ se llama rango de f y coincide con el rango de cualquier matriz asociada. Consecuencias inmediatas: si $\dim V > \dim W$, f no puede ser inyectiva; si $\dim V$, no puede ser sobreyectiva; y si las dimensiones coinciden, inyectiva, sobreyectiva y biyectiva son equivalentes.

Método: estudiar una aplicación lineal

1. Escribe la matriz A colocando en columnas las imágenes de los vectores de la base de partida.
2. Calcula el rango de A: es la dimensión de la imagen.
3. Resuelve $Av = 0$ para obtener una base del núcleo; su dimensión es el número de columnas menos el rango.
4. Una base de la imagen la forman las columnas de A que contienen pivotes.
5. Concluye: inyectiva si el núcleo es nulo, sobreyectiva si el rango es la dimensión de llegada.

Propiedad: matrices y operaciones

La matriz de la composición $g \circ f$ es el producto GF, en ese orden, porque primero actúa f. La matriz de la aplicación inversa, cuando existe, es la matriz inversa. Si A es la matriz de un endomorfismo en una base y P la matriz de cambio de base, la matriz en la nueva base es $P^{-1}AP$; dos matrices relacionadas así se llaman semejantes y tienen el mismo determinante, la misma traza y el mismo rango.

Ejemplo 4

Halla la aplicación lineal del plano que lleva $(1,0)$ a $(2,1)$ y $(1,1)$ a $(0,3)$.

Por linealidad, $f(0,1) = f(1,1) - f(1,0) = (-2,2)$. La matriz es $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $f(x,y) = (2x - 2y,\ x + 2y)$. Comprobación: $f(1,1) = (0,3)$.

Ejemplo 5

Estudia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x + y,\ y + z)$.

Matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, de rango 2: es sobreyectiva. Por el teorema de la dimensión, $\dim \ker f = 1$; resolviendo, $\ker f = \langle (1, -1, 1) \rangle$, así que no es inyectiva.

Ejemplo 6

Una tienda de Cádiz aplica a sus precios sin impuestos (a, b) de dos productos un 21 % de IVA y después una rebaja del 10 %. Escribe la transformación.

Cada paso multiplica por una matriz diagonal: $1{,}21 I$ y $0{,}9 I$. La composición es $0{,}9 \cdot 1{,}21\, I = 1{,}089\, I$: el precio final es un 8,9 % mayor que el inicial, y el orden de los pasos no importa porque las matrices escalares conmutan.

Definición: isomorfismo y endomorfismo

Una aplicación lineal de un espacio en sí mismo se llama endomorfismo; si además es biyectiva, automorfismo. Una aplicación lineal biyectiva entre dos espacios cualesquiera se llama isomorfismo, y dos espacios son isomorfos cuando existe un isomorfismo entre ellos. Un resultado fundamental afirma que dos espacios vectoriales de dimensión finita son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión. Por ejemplo, la aplicación que asigna a cada polinomio de $\mathcal{P}_2$ sus tres coeficientes es un isomorfismo con $\mathbb{R}^3$, y por eso todos los problemas sobre polinomios de grado 2 pueden resolverse con vectores de tres componentes y matrices.

Observación: imágenes de subespacios

La imagen de un subespacio por una aplicación lineal es otro subespacio, y su dimensión nunca aumenta. En particular, una aplicación lineal transforma rectas que pasan por el origen en rectas que pasan por el origen o en el punto 0, y planos en planos, rectas o el origen. La imagen de un paralelogramo es un paralelogramo, posiblemente aplastado, y el punto medio de un segmento se transforma en el punto medio del segmento imagen. Estas propiedades permiten dibujar a mano la imagen de una figura calculando solo la imagen de unos pocos vértices, que es justo lo que hacen los programas de dibujo vectorial.

Interpretación geométrica

Las aplicaciones lineales del plano y del espacio tienen una interpretación geométrica muy clara. Los giros conservan distancias y ángulos, y sus matrices son ortogonales con determinante 1; las simetrías respecto de una recta o de un plano también conservan distancias, pero tienen determinante -1 porque invierten la orientación. Las homotecias multiplican todas las longitudes por el mismo factor, y las proyecciones aplastan el espacio sobre una recta o un plano, de modo que su núcleo es la dirección que se pierde. El valor absoluto del determinante indica cómo cambian las áreas o los volúmenes, y su signo indica si se conserva la orientación. Un determinante nulo significa que la

transformación aplasta el espacio en una dimensión menor y que, por tanto, no se puede deshacer. Estas ideas son el fundamento de los gráficos por ordenador, de la robótica y de la visión artificial: cada vez que un videojuego dibuja una escena, el procesador gráfico multiplica millones de vectores por matrices de giro, escalado y proyección. También se usan en ingeniería civil para estudiar las deformaciones de una estructura y en física para describir cambios de sistema de referencia.

¡Atención!

Una aplicación con término independiente, como $f(x) = 2x + 1$, no es lineal en el sentido del álgebra lineal, aunque su gráfica sea una recta: es afín. Al escribir la matriz, las imágenes de la base van en columnas, no en filas. Y la matriz de $g \circ f$ es GF, no FG: el producto de matrices se lee de derecha a izquierda.

¿Sabías que?

Los buscadores de internet ordenaban las páginas web resolviendo un problema de álgebra lineal con una matriz de miles de millones de filas, una por página. Y las redes neuronales que reconocen imágenes o traducen textos alternan, capa tras capa, aplicaciones lineales con pequeñas funciones no lineales. Entrenar esas redes consiste, en gran parte, en ajustar los coeficientes de enormes matrices.

El consejo de Otto

para saber cómo actúa una aplicación lineal, mira qué hace con los vectores de la base. El resto sale por linealidad.