# Ejercicios - Aplicaciones lineales

Curso: Universidad 1 · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

## Ejercicio 1

**Ejercicio 1 – ¿Es lineal la aplicación?**

Una aplicación $f : V \to W$ es lineal si $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ para todos los vectores y escalares. Estudia cada caso.

a. $f(x, y) = (2x + y,\ x - 3y)$
b. $g(x, y) = (x + 1,\ y)$
c. $h(x, y) = (xy,\ x)$
d. $D : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$, $D(p) = p'$

## Ejercicio 2

**Ejercicio 2 – Matriz asociada**

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + 2y,\ y - z)$.

a. Calcula $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$.
b. Escribe la matriz $A$ de $f$ en las bases canónicas.
c. Calcula $f(1, 1, 1)$ y $f(2, -1, 3)$ multiplicando por $A$.
d. ¿Qué dimensiones tiene $A$ y por qué?

## Ejercicio 3

**Ejercicio 3 – Núcleo e imagen**

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz .

a. Calcula el rango de $A$.
b. Halla una base del núcleo $\ker f = \{v :\ Av = 0\}$.
c. Halla una base de la imagen $\operatorname{Im} f$ y sus ecuaciones implícitas.
d. Comprueba el teorema de la dimensión $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 3$.

## Ejercicio 4

**Ejercicio 4 – Inyectiva, sobreyectiva, biyectiva**

Recuerda: $f$ es inyectiva si y solo si $\ker f = \{0\}$, y sobreyectiva si $\operatorname{Im} f$ es todo el espacio de llegada.

a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x,\ y,\ x + y)$.
b. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x + z,\ y)$.
c. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (x + 2y,\ 3x + 6y)$.
d. ¿Puede existir una aplicación lineal inyectiva de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$? Justifica.

## Ejercicio 5

### Ejercicio 5 – Composición de aplicaciones

Sean $f(x, y) = (x + y,\ 2y)$ y $g(x, y) = (x,\ x - y)$ endomorfismos de $\mathbb{R}^2$.

a. Escribe sus matrices $F$ y $G$.
b. Calcula $g \circ f$ directamente y con el producto $GF$.
c. Calcula la matriz de $f \circ g$. ¿Coincide con la de $g \circ f$?
d. ¿Es $f$ invertible? Calcula $f^{-1}$.

## Ejercicio 6

### Ejercicio 6 – Matriz en otra base

Sea $f$ el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ con matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ en la base canónica y sea $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

a. Calcula $f(1, 1)$ y $f(1, -1)$ y exprésalos en la base $B$.
b. Escribe la matriz $A_B$ de $f$ en la base $B$.
c. Comprueba que $A_B = P^{-1}AP$ con $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
d. Describe geométricamente la acción de $f$.

## Ejercicio 7

### Ejercicio 7 – Transformaciones en un programa de diseño

Un programa de diseño gráfico creado en Barcelona aplica a los dibujos transformaciones lineales del plano: el giro de $90^\circ$ $R$, el estiramiento horizontal $S$ (duplica la $x$) y la reflexión $T$ respecto del eje $x$.

a. Escribe las matrices de $R$, $S$ y $T$.
b. El usuario gira y después estira. Escribe la matriz de la composición y halla la imagen del cuadrado de vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$.
c. ¿Da lo mismo estirar y después girar? Justifica.
d. Calcula el área de la imagen del cuadrado con el determinante.

## Ejercicio 8

### Ejercicio 8 – La sombra de un poste

En un patio de un colegio de Almería se modela la sombra de objetos sobre una recta del suelo. La proyección ortogonal sobre la recta $y = x$ es $p(v) = \dfrac{v \cdot u}{u \cdot u} u$ con $u = (1, 1)$.

a. Calcula la matriz $P$ de $p$.
b. Calcula $p(4, 2)$ y $p(1, -1)$.
c. Halla el núcleo y la imagen de $p$.
d. Comprueba que $P^2 = P$ y explica su significado.

## Ejercicio 9

### Ejercicio 9 – Valor nutritivo de una receta

Una escuela de cocina de San Sebastián calcula la proteína y la grasa de sus recetas mediante una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que lleva los gramos de pollo, legumbres y aceite de oliva a los gramos de proteína y de grasa. La tabla da los gramos de cada nutriente por cada 100 g de ingrediente (valores redondeados).

| Por 100 g | Pollo | Legumbres | Aceite de oliva |
|---|---|---|---|
| Proteína (g) | 25 | 10 | 5 |
| Grasa (g) | 2 | 20 | 80 |

a. Escribe la matriz de $f$ (con las cantidades en gramos).
b. Calcula los nutrientes de una receta con 200 g de pollo, 150 g de legumbres y 100 g de aceite.
c. Calcula el rango de la matriz y la dimensión del núcleo.
d. ¿Qué significa que el núcleo no sea nulo? ¿Tiene sentido práctico?

## Ejercicio 10

### Ejercicio 10 – Letras en cursiva

Un programa de tipografía de una imprenta de Valladolid convierte las letras normales en cursiva con la cizalla $c(x, y) = \left(x + \frac{1}{4} y,\ y\right)$.

a. Escribe la matriz de $c$ y calcula su determinante.
b. Calcula la imagen del rectángulo de vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 4), (0, 4)$ que contiene una letra.
c. ¿Cambia el área de la letra? ¿Y su altura?
d. Halla la matriz de la transformación inversa, que devuelve la letra a su forma normal.

## Ejercicio 11

### Ejercicio 11 – Posición y velocidad de un ascensor

La altura de un ascensor de un edificio de Benidorm durante una prueba es $p(t) = 2 + 3t + t^2 - \frac{1}{3} t^3$ (metros, segundos). La derivación $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ convierte

posición en velocidad.

a. Escribe la matriz de $D$ respecto de las bases $\{1, t, t^2, t^3\}$ y $\{1, t, t^2\}$.
b. Calcula la velocidad $v = D(p)$ usando la matriz.
c. Halla el núcleo y la imagen de $D$. Interpreta el núcleo.
d. ¿Es $D$ inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

## Ejercicio 12

### Ejercicio 12 – La rotación de la Tierra

En un modelo de un planetario de Valencia, la Tierra gira alrededor del eje $z$. El giro de ángulo $\theta$ es la aplicación lineal de matriz .

a. Calcula $\det R_\theta$.
b. Comprueba que $R_\theta^T R_\theta = I$ y deduce que conserva las longitudes.
c. En 6 horas la Tierra gira $90^\circ$. ¿Dónde estará el punto $(1, 0, 1)$?
d. ¿Qué vectores quedan fijos? Relaciónalo con el núcleo de $R_\theta - I$.

## Ejercicio 13

### Ejercicio 13 – Un filtro de suavizado

Una aplicación de fotografía suaviza una fila de 3 píxeles con brillos $(a, b, c)$ sustituyendo cada uno por la media con sus vecinos: $f(a, b, c) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c}{2}\right)$.

a. Escribe la matriz del filtro.
b. Aplica el filtro a $(3, 9, 6)$.
c. Calcula el determinante. ¿Se puede deshacer el filtro?
d. Encuentra la fila original que, filtrada, da $(4, 5, 6)$.

## Ejercicio 14

### Ejercicio 14 – El brazo de un robot

El brazo de un robot de un almacén logístico de Zaragoza mueve paquetes del plano. Primero gira $90^\circ$ alrededor del origen y después se desplaza 2 unidades a la derecha: $m(v) = Rv + b$ con $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $b = (2, 0)$.

a. Calcula $m(1, 0)$, $m(0, 1)$ y $m(0, 0)$.
b. ¿Es $m$ una aplicación lineal? Justifica.
c. Comprueba que, añadiendo una tercera coordenada igual a 1, $m$ se escribe como el producto por la matriz $3 \times 3$ .

d. ¿Qué punto queda fijo por $m$?

## Ejercicio 15

**Ejercicio 15 – Problema: una aplicación definida por imágenes**

Una aplicación lineal queda determinada por las imágenes de una base. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ con $f(1,0,0)=(1,1)$, $f(1,1,0)=(2,0)$ y $f(1,1,1)=(0,1)$.

a. Justifica que $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.
b. Calcula $f(e_2)$ y $f(e_3)$ usando la linealidad.
c. Escribe la matriz de $f$ y la expresión $f(x,y,z)$.
d. Halla el núcleo y la imagen de $f$.
e. Calcula todos los vectores $v$ con $f(v)=(1,1)$ y describe ese conjunto geométricamente.

## Ejercicio 16

**Ejercicio 16 – Problema: un endomorfismo con parámetro**

Sea $f_a$ el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de matriz .

a. Calcula $\det A_a$.
b. ¿Para qué valores de $a$ es $f_a$ un isomorfismo?
c. Para el valor en que no lo es, halla bases del núcleo y de la imagen.
d. Para $a=1$, calcula $f_1^{-1}(1,1,2)$.

## Ejercicio 17

**Ejercicio 17 – Problema: proyección y simetría respecto de un plano**

Sea $\Pi$ el plano $x+y+z=0$ de $\mathbb{R}^3$, con vector normal $n=(1,1,1)$. La proyección ortogonal sobre $\Pi$ es $p(v)=v-\dfrac{v\cdot n}{n\cdot n}n$ y la simetría respecto de $\Pi$ es $s(v)=v-2\dfrac{v\cdot n}{n\cdot n}n$.

a. Escribe la matriz $P$ de $p$.
b. Halla $\ker p$ e $\operatorname{Im} p$ sin cálculos, razonando geométricamente.
c. Escribe la matriz $S$ de $s$ y comprueba que $S=2P-I$.
d. Calcula $p(3,0,0)$ y $s(3,0,0)$.
e. Comprueba que $P^2=P$ y $S^2=I$ y explica su significado.

## Ejercicio 18

**Ejercicio 18 – Problema: evaluar polinomios**

Sea $f : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$, $f(p) = (p(0), p(1))$. Este tipo de aplicación se usa en ingeniería para controlar el valor de una curva en ciertos puntos.

a. Demuestra que $f$ es lineal.
b. Escribe su matriz respecto de $\{1, x, x^2\}$ y la base canónica.
c. Halla el núcleo y comprueba que está formado por los múltiplos de $x(x-1)$.
d. ¿Es sobreyectiva? Encuentra todos los $p$ con $p(0) = 2$ y $p(1) = 5$.

## Ejercicio 19

**Ejercicio 19 – Problema: pasar una foto a blanco y negro**

Una aplicación de fotografía convierte un color $(R, G, B)$ en un nivel de gris con $g(R, G, B) = 0{,}299R + 0{,}587G + 0{,}114B$, porque el ojo es más sensible al verde.

a. Explica por qué $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es lineal y escribe su matriz.
b. Calcula el gris del naranja $(255, 128, 0)$ y del azul $(0, 0, 255)$.
c. ¿Qué dimensión tiene el núcleo? Da una base.
d. Encuentra un color distinto del naranja con el mismo gris, explica por qué la conversión no se puede deshacer y comenta una consecuencia para las personas daltónicas.

## Ejercicio 20

**Ejercicio 20 – Desafío: propiedades generales**

Demuestra los siguientes resultados sobre una aplicación lineal $f : V \to W$ entre espacios de dimensión finita.

a. $\ker f$ es un subespacio de $V$.
b. $f$ es inyectiva si y solo si $\ker f = \{0\}$.
c. Si $\dim V = \dim W$, entonces $f$ es inyectiva si y solo si es sobreyectiva.
d. Encuentra un endomorfismo $f \neq 0$ de $\mathbb{R}^2$ con $f \circ f = 0$ y comprueba que $\operatorname{Im} f \subseteq \ker f$.