Soluciones - Aplicaciones lineales

Curso: Universidad 1

Solución del ejercicio 1

Planteamiento. Una aplicación es lineal si conserva sumas y productos por escalares. Las expresiones con combinaciones lineales sin término independiente lo son; para descartar una aplicación basta ver que no lleva el 0 al 0 o encontrar un contraejemplo numérico.

a. Sí: cada componente es una combinación lineal de x e y sin término independiente. Por ejemplo, $f(\lambda u + \mu v)$ tiene primera componente $2(\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2) = \lambda(2u_1 + u_2) + \mu(2v_1 + v_2)$.
b. No: $g(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$, y toda aplicación lineal lleva el 0 al 0. Es una traslación.
c. No: $h(2,2) = (4,2)$ pero $2h(1,1) = (2,2)$; el producto xy no es lineal.
d. Sí: $(\lambda p + \mu q)' = \lambda p' + \mu q'$ por las reglas de derivación.

Solución del ejercicio 2

Planteamiento. La matriz asociada se construye colocando en columnas las imágenes de los vectores de la base de partida. Después, la imagen de cualquier vector se obtiene multiplicando la matriz por sus coordenadas.

a. $f(e_1) = (1,0)$, $f(e_2) = (2,1)$, $f(e_3) = (0,-1)$.
b. Las imágenes de la base van en columnas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
c. $A(1,1,1)^T = (3,0)$ y $A(2,-1,3)^T = (0,-4)$.
d. 2×3: tantas filas como la dimensión del espacio de llegada y tantas columnas como la del de partida.

Solución del ejercicio 3

Planteamiento. El rango de la matriz es la dimensión de la imagen. El núcleo se obtiene resolviendo el sistema homogéneo $Av = 0$, y la imagen está generada por las columnas con pivote; el teorema de la dimensión sirve de comprobación.

a. La fila 3 es la suma de las dos primeras y la 2 no es proporcional a la 1: rango 2.
b. $x + 2y = 0$ y $2x + 4y + z = 0$ dan $z = 0$, $x = -2y$: $\ker f = \langle(-2,1,0)\rangle$.
c. La imagen está generada por las columnas; la segunda es el doble de la primera.

   Base: $\{(1,2,3),(0,1,1)\}$. Ecuación: [redacted] .

d. $1 + 2 = 3$.

Solución del ejercicio 4

Planteamiento. Una aplicación lineal es inyectiva si su núcleo es nulo y sobreyectiva si su rango coincide con la dimensión del espacio de llegada. El teorema de la dimensión permite descartar algunos casos sin hacer cálculos.

a. $\ker f = \{0\}$ (si $x = y = 0$); inyectiva. Rango 2 < 3: no sobreyectiva.
b. Rango 2 = dimensión de llegada: sobreyectiva. $\ker g = \langle(1, 0, -1)\rangle \neq \{0\}$: no inyectiva.
c. La segunda fila es el triple de la primera: rango 1. Ni inyectiva ($\ker h = \langle(-2, 1)\rangle$) ni sobreyectiva.
d. No: $\dim \ker f = 3 - \operatorname{rg} f \geq 3 - 2 = 1$.

Solución del ejercicio 5

Planteamiento. La matriz de una composición es el producto de matrices en el orden inverso al de aplicación: primero actúa f, así que la matriz de $g \circ f$ es GF. La inversa existe si el determinante no se anula.

a. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
b. $g(f(x, y)) = g(x + y, 2y) = (x + y,\ x - y)$; $GF = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, que da lo mismo.
c. $FG = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, distinta: $f \circ g \neq g \circ f$.
d. $\det F = 2 \neq 0$: sí. $F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, es decir $f^{-1}(x, y) = \left(x - \frac{y}{2},\ \frac{y}{2}\right)$.

Solución del ejercicio 6

Planteamiento. Calculamos las imágenes de los vectores de la nueva base y las expresamos en esa base: sus coordenadas forman las columnas de la matriz nueva. La fórmula $A_B = P^{-1}AP$ debe dar el mismo resultado.

a. $f(1, 1) = (4, 4) = 4(1, 1)$ y $f(1, -1) = (2, -2) = 2(1, -1)$.
b. $A_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
c. $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
d. Estira por 4 en la dirección de $y = x$ y por 2 en la de $y = -x$.

Solución del ejercicio 7

Planteamiento. Escribimos la matriz de cada transformación con las imágenes de e_1 y e_2. Componer es multiplicar en el orden inverso, aplicamos la matriz a cada vértice y

usamos el determinante para saber cómo cambia el área.

a. $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
b. Primero R y luego S: $SR = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vértices imagen: $(0,0),\ (0,1),\ (-2,1),\ (-2,0)$.
c. $RS = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq SR$: no, el orden importa.
d. $|\det(SR)| = |\det S \det R| = 2 \cdot 1 = 2$: el área se duplica.

Solución del ejercicio 8

Planteamiento. Calculamos la matriz de la proyección con la fórmula aplicada a los vectores de la base canónica. El núcleo es la dirección que se pierde y la imagen la recta sobre la que se proyecta; proyectar dos veces no cambia nada.

a. $p(e_1) = \frac{1}{2}(1,1)$, $p(e_2) = \frac{1}{2}(1,1)$: $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
b. $p(4,2) = (3,3)$ y $p(1,-1) = (0,0)$.
c. $\ker p = \langle (1,-1) \rangle$ (la recta perpendicular) e $\operatorname{Im} p = \langle (1,1) \rangle$.
d. $P^2 = P$: proyectar dos veces es lo mismo que proyectar una, porque lo proyectado ya está sobre la recta.

Solución del ejercicio 9

Planteamiento. La aplicación lleva cantidades de ingredientes a cantidades de nutrientes, y su matriz se lee directamente en la tabla. Multiplicamos por el vector de la receta y usamos el teorema de la dimensión para estudiar el núcleo.

a. $A = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 2 & 20 & 80 \end{pmatrix}$ (proteína y grasa, columnas: pollo, legumbres, aceite).
b. $A(200, 150, 100)^T = (70,\ 114)$ g de proteína y de grasa.
c. Rango 2, luego $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$.
d. Hay combinaciones de cantidades que dan proteína y grasa nulas, pero exigen cantidades negativas de algún ingrediente: matemáticamente existen, en la cocina no.

Solución del ejercicio 10

Planteamiento. Escribimos la matriz de la cizalla y aplicamos la transformación a cada vértice. El determinante indica cómo cambian las áreas, y la inversa de la matriz describe la transformación que deshace la cursiva.

a. $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det C = 1$.

b. $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,4)$, $(1,4)$: un paralelogramo inclinado.
c. El área se multiplica por $|\det C| = 1$: no cambia (8 unidades). La altura tampoco, porque y no se modifica.
d. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 11

Planteamiento. La derivación es lineal. Su matriz tiene en columnas las coordenadas de las derivadas de $1, t, t^2, t^3$. Multiplicando por las coordenadas del polinomio obtenemos la velocidad, y el núcleo está formado por las funciones constantes.

a.  .
b. Coordenadas de p: $(2, 3, 1, -\frac{1}{3})$; D da $(3, 2, -1)$, es decir $v(t) = 3 + 2t - t^2$.
c. $\ker D$ son los polinomios constantes (dimensión 1): posiciones que no cambian dan velocidad nula. $\operatorname{Im} D = \mathcal{P}_2$.
d. No es inyectiva (dos posiciones que difieren en una constante tienen la misma velocidad); sí es sobreyectiva.

Solución del ejercicio 12

Planteamiento. Comprobamos que la matriz de giro es ortogonal, lo que garantiza que conserva longitudes y ángulos, y que su determinante vale 1. Los vectores fijos son el núcleo de $R_\theta - I$, que coincide con el eje de giro.

a. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
b. El producto da la identidad porque las columnas son ortonormales. Entonces $\|R_\theta v\|^2 = v^T R_\theta^T R_\theta v = \|v\|^2$.
c. $R_{\pi/2}(1,0,1) = (0,1,1)$.
d. Para $\theta \neq 0$, los del eje z: $\ker(R_\theta - I) = \langle (0,0,1) \rangle$.

Solución del ejercicio 13

Planteamiento. Escribimos la matriz del filtro con los coeficientes de cada media y la aplicamos a la fila de píxeles. Un determinante no nulo indica que el filtro se puede deshacer resolviendo un sistema lineal.

a.  .
b. $(6,\ 6,\ \frac{15}{2})$.
c. $\det = -\frac{1}{12} \neq 0$: es invertible y se puede deshacer.

d. Resolviendo $F(a,b,c)^T = (4,5,6)$: $(a,b,c) = (3,\ 5,\ 7)$.

Solución del ejercicio 14

Planteamiento. Calculamos las imágenes de algunos puntos y comprobamos si se conserva el origen. Una traslación no es lineal, pero se puede escribir como producto por una matriz 3×3 usando coordenadas homogéneas.

a. $m(1,0) = (2,1)$, $m(0,1) = (1,0)$, $m(0,0) = (2,0)$.
b. No: $m(0,0) \neq (0,0)$. Es una aplicación afín (lineal más traslación).
c. [redacted], que coincide con m. Son las coordenadas homogéneas que usan los robots y los gráficos 3D.
d. $(-y+2,\ x) = (x,y)$: $x = y$ y $-x+2 = x$, luego el punto $(1,1)$.

Solución del ejercicio 15

Planteamiento. Como los vectores dados forman una base, la linealidad permite calcular las imágenes de la base canónica por diferencias. Con ellas escribimos la matriz y estudiamos núcleo, imagen y el conjunto de soluciones de $f(v) = w$.

a. Su matriz es triangular con unos en la diagonal: determinante 1.
b. $f(e_2) = f(1,1,0) - f(1,0,0) = (1,-1)$ y $f(e_3) = f(1,1,1) - f(1,1,0) = (-2,1)$.
c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $f(x,y,z) = (x+y-2z,\ x-y+z)$.
d. Rango 2: $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ y $\dim \ker f = 1$. Resolviendo, $\ker f = \langle (1,3,2) \rangle$.
e. Una solución particular es $(1,0,0)$; todas son $(1,0,0) + \lambda(1,3,2)$: una recta paralela al núcleo.

Solución del ejercicio 16

Planteamiento. Un endomorfismo es isomorfismo si su determinante no se anula. Calculamos el determinante en función del parámetro y, en el valor que lo anula, hallamos bases del núcleo y de la imagen; en otro valor resolvemos un sistema.

a. Desarrollando por la primera columna: $1 \cdot (1-0) + 1 \cdot (a^2 - 1) = a^2$.
b. Es isomorfismo si y solo si $\det \neq 0$, es decir $a \neq 0$.
c. $a = 0$: [redacted]. $\ker f_0 = \langle (-1,0,1) \rangle$; $\operatorname{Im} f_0 = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle$, el plano $x = z$.
d. Resolviendo $A_1 v = (1,1,2)$: $v = (0,-1,2)$.

Solución del ejercicio 17

Planteamiento. Construimos las matrices a partir de la fórmula vectorial con nn^T. La geometría nos dice sin cálculos cuál es el núcleo y cuál la imagen, y las relaciones $P^2 = P$ y $S^2 = I$ confirman el resultado.

a. .

b. Se anula sobre la recta normal: $\ker p = \langle (1,1,1) \rangle$; la imagen es el plano Π.

c. .

d. $p(3,0,0) = (2,-1,-1)$ y $s(3,0,0) = (1,-2,-2)$.

e. Proyectar dos veces equivale a proyectar una vez; reflejar dos veces devuelve el punto original.

Solución del ejercicio 18

Planteamiento. Comprobamos la linealidad con la definición, escribimos la matriz evaluando los polinomios de la base y resolvemos el sistema homogéneo para el núcleo. La solución general de $f(p) = w$ es una particular más el núcleo.

a. $(\lambda p + \mu q)(0) = \lambda p(0) + \mu q(0)$, y lo mismo en 1.

b. $f(1) = (1,1)$, $f(x) = (0,1)$, $f(x^2) = (0,1)$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. $p(0) = a = 0$ y $p(1) = a + b + c = 0$: $p = bx - bx^2 = -b\,x(x-1)$. $\dim \ker f = 1$.

d. Rango 2: sí. $p = 2 + 3x + \lambda x(x-1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 19

Planteamiento. La conversión a gris es una aplicación lineal de rango 1, así que su núcleo tiene dimensión 2. Calculamos grises concretos y construimos colores distintos con el mismo gris sumando un vector del núcleo.

a. Es una combinación lineal de las componentes; matriz 1×3: $(0{,}299 \;\; 0{,}587 \;\; 0{,}114)$.

b. Naranja: $0{,}299 \cdot 255 + 0{,}587 \cdot 128 = 151{,}381$. Azul: $0{,}114 \cdot 255 = 29{,}070$.

c. Rango 1: $\dim \ker g = 2$. Base: $\{(587,-299,0),\ (114,0,-299)\}$.

d. Sumando al naranja un vector del núcleo, por ejemplo $-\frac{1}{20}(587,-299,0) \approx (-29{,}35;\ 14{,}95;\ 0)$, se obtiene $(225{,}65;\ 142{,}95;\ 0)$, otro naranja con el mismo gris. Como g no es inyectiva, distintos colores tienen el mismo gris y no se puede recuperar el color. Por eso los gráficos accesibles no deben distinguir datos solo por el color.

Solución del ejercicio 20

Planteamiento. Demostramos cada propiedad con la definición de aplicación lineal y el teorema de la dimensión. Para el ejemplo final buscamos una matriz no nula cuyo cuadrado sea cero y comparamos su núcleo con su imagen.

a. $f(0)=0$; si $f(u)=f(v)=0$, $f(\lambda u+\mu v)=\lambda f(u)+\mu f(v)=0$.
b. Si $\ker f=\{0\}$ y $f(u)=f(v)$, entonces $f(u-v)=0$ y $u=v$. Recíprocamente, si f es inyectiva y $f(v)=0=f(0)$, $v=0$.
c. Teorema de la dimensión: $\dim\ker f=0 \iff \dim \operatorname{Im} f=\dim V=\dim W$.
d. $N=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$: $N^2=0$, $\operatorname{Im} f=\ker f=\langle(1,0)\rangle$.