Apuntes - Potencias, cuadrados y cubos

Curso: 6 Primaria

Las potencias abrevian multiplicaciones repetidas. Las usamos en áreas, volúmenes y números muy grandes.

Actividad de introducción: las casillas del tablero

Un tablero de ajedrez tiene 8 filas con 8 casillas cada una. ¿Cuántas casillas hay? Podemos escribir 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 64 o, de forma abreviada, 8 · 8 = 8^2 = 64. Si construimos un cubo con cubitos de 3 por 3 por 3, necesitamos 3 · 3 · 3 = 3^3 = 27 cubitos. Las potencias abrevian multiplicaciones en las que se repite el mismo factor. También sirven para escribir números muy grandes y para calcular áreas de cuadrados y volúmenes de cubos. En este capítulo aprenderás su lenguaje (base y exponente), a calcular raíces cuadradas y a usarlas con el orden correcto de las operaciones.

Potencias

Definición: potencia

Una **potencia** es una multiplicación repetida: $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n veces). La **base** es el número que se repite y el **exponente** cuenta cuántas veces.

Ejemplo 1

Calcula 2^5 y 3^4.

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Definición: cuadrado y cubo

a^2 es el **cuadrado** (relacionado con el área) y a^3 el **cubo** (relacionado con el volumen).

Ejemplo 2

Calcula el área de un cuadrado de 7 cm de lado y el volumen de un cubo de 4 cm de arista.

Área: $7^2 = 49$ cm². Volumen: $4^3 = 64$ cm³.

Potencias de 10 y casos especiales

Propiedad: potencias de 10

10^n es un 1 seguido de n ceros: $10^3 = 1\,000$ y $10^6 = 1\,000\,000$.

Propiedad: casos especiales

$a^1 = a$ y $1^n = 1$.

Ejemplo 3

Escribe 5 000 con potencias de 10.

$5\,000 = 5 \cdot 10^3$.

Raíz cuadrada

Observación

La raíz cuadrada es la operación inversa del cuadrado. $\sqrt{49} = 7$ porque $7^2 = 49$. Los cuadrados perfectos son 1, 4, 9, 16, 25, 36...

Ejemplo 4

Calcula $\sqrt{81}$ y $\sqrt{144}$.

$\sqrt{81} = 9$ porque $9^2 = 81$. $\sqrt{144} = 12$ porque $12^2 = 144$.

Operaciones combinadas

Regla: orden de las operaciones

Primero paréntesis, luego potencias, después × y ÷, y por último + y −.

Ejemplo 5

Calcula $3 + 2 \cdot 4^2$.

Primero la potencia: $4^2 = 16$. Luego $2 \cdot 16 = 32$. Por último $3 + 32 = 35$.

¡Atención!

5^3 no es $5 \cdot 3$: es $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Y $(-2)^2$ no es lo mismo que -2^2.

Potencias en la vida real

Ejemplo 6

Un tablero de ajedrez tiene 8 × 8 casillas. Expresa el número de casillas como potencia y calcúlalo.

$8 \cdot 8 = 8^2 = 64$ casillas.

Ejemplo 7

Una caja cúbica tiene 10 cm de arista. ¿Cuál es su volumen?

$V = 10^3 = 1\,000$ cm³, o sea 1 litro.

Propiedad: potencias de 10 y descomposición

Podemos descomponer un número con potencias de 10: $3\,405 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5$.

Método: calcular una expresión con potencias

1. Calcula los paréntesis.
2. Resuelve las potencias.
3. Haz las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
4. Termina con las sumas y restas.

Cuadrados perfectos y raíces

Propiedad: cuadrados perfectos

Los cuadrados perfectos son los resultados de elevar al cuadrado los números naturales: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144... Su raíz cuadrada es un número natural. Un cuadrado perfecto termina siempre en 0, 1, 4, 5, 6 o 9, nunca en 2, 3, 7 u 8; por eso 1 237 no puede ser cuadrado perfecto.

Ejemplo 8

Calcula $\sqrt{196}$ probando con números.

$13^2 = 169$ y $15^2 = 225$; 196 está entre ellos. Se prueba $14^2 = 14 \cdot 14 = 196$. Entonces $\sqrt{196} = 14$. También sirve saber que el 196 termina en 6, y $4 \cdot 4 = 16$ y $6 \cdot 6 = 36$ acaban en 6.

Método: raíz cuadrada aproximada

1. Busca los dos cuadrados perfectos entre los que está el número.
2. Su raíz estará entre las raíces de esos cuadrados.
3. Prueba con el número intermedio para afinar.

Ejemplo 9

Entre qué dos números naturales está $\sqrt{70}$?

$8^2 = 64$ y $9^2 = 81$. Como $64 < 70 < 81$, la raíz está entre 8 y 9 (es aproximadamente 8,4).

Potencias de base 10 y cubos

Regla: multiplicar y dividir por potencias de 10

Multiplicar por 10^n es desplazar la coma n lugares a la derecha (añadir n ceros en los enteros): $3{,}2 \cdot 10^2 = 320$. Dividir entre 10^n es desplazarla n lugares a la izquierda: $450 : 10^3 = 0{,}45$. Con las potencias de 10 se pasa de una unidad a otra del Sistema Métrico Decimal.

Ejemplo 10

Calcula $7{,}5 \cdot 10^3$ y $62 : 10^2$.

$7{,}5 \cdot 1\,000 = 7\,500$, porque se desplaza la coma tres lugares a la derecha. $62 : 100 = 0{,}62$, porque se desplaza la coma dos lugares a la izquierda.

Ejemplo 11

Calcula $\sqrt[3]{27}$ y $\sqrt[3]{125}$ (raíz cúbica).

La raíz cúbica es la operación inversa del cubo. $3^3 = 27$, así que la raíz cúbica de 27 es 3. $5^3 = 125$, así que la raíz cúbica de 125 es 5.

¡Atención! Errores frecuentes

- Pensar que 5^3 es $5 \cdot 3 = 15$; en realidad es $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.
- Confundir 2^3 (= 8) con 3^2 (= 9).
- Sumar antes de calcular la potencia: $2 + 3^2$ es $2 + 9 = 11$, no $5^2 = 25$.
- Pensar que la raíz de 36 es 18: la raíz cuadrada no es la mitad, $6 \cdot 6 = 36$.

¿Sabías que...?

Una leyenda cuenta que el inventor del ajedrez pidió como premio un grano de trigo en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera, y así duplicando hasta la

casilla 64. El rey pensó que era un premio modesto, pero la suma de $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{63}$ es 18 446 744 073 709 551 615 granos: ¡mucho más trigo del que se ha cosechado nunca en el mundo!

El consejo de Otto

Para calcular una potencia, escribe el producto: tantas veces la base como indique el exponente.