Apuntes - Divisibilidad: múltiplos y divisores

Curso: 6 Primaria

Los múltiplos y los divisores sirven para repartir en partes iguales y para saber cuándo coinciden dos ciclos.

Actividad de introducción: las luces del escenario

En el escenario de las fiestas de un pueblo hay dos luces: la azul parpadea cada 4 segundos y la roja cada 6. Si se encienden a la vez, ¿cuándo volverán a coincidir? Escribe los múltiplos: la azul parpadea en 4, 8, 12, 16... y la roja en 6, 12, 18... ¡Coinciden a los 12 segundos! Ese 12 es el mínimo común múltiplo de 4 y 6. Ahora cambia la pregunta: quieres repartir 12 caramelos y 18 gominolas en bolsas iguales. El mayor número de bolsas es 6, el máximo común divisor. En este capítulo aprenderás a decidir cuándo usar uno y cuándo el otro.

Múltiplos y divisores

Definición: múltiplo y divisor

Un **múltiplo** se obtiene multiplicando un número por 1, 2, 3... Un **divisor** divide de forma exacta. Si $12 = 3 \times 4$, entonces 12 es múltiplo de 3 y 3 es divisor de 12.

Criterios de divisibilidad

Regla: criterios

Por 2: acaba en cifra par. Por 3: la suma de las cifras es múltiplo de 3. Por 5: acaba en 0 o 5. Por 9: la suma de las cifras es múltiplo de 9. Por 10: acaba en 0.

Ejemplo 1

¿Es 2.340 divisible por 2, 3, 5, 9 y 10?

Acaba en 0: divisible por 2, 5 y 10. Suma de cifras: 2 + 3 + 4 + 0 = 9: divisible por 3 y por 9. Es divisible por **2, 3, 5, 9 y 10**.

Primos y compuestos

Definición: número primo

Un número es **primo** si solo tiene dos divisores: 1 y él mismo. El 1 no es primo. Los

que tienen más divisores son **compuestos**.

Método: descomponer en factores primos

1. Divide entre el menor primo posible.
2. Repite con el cociente.
3. Para cuando llegues a 1.
4. Escribe el producto de los primos.

Ejemplo 2

Descompón 84 en factores primos.

84 : 2 = 42; 42 : 2 = 21; 21 : 3 = 7; 7 : 7 = 1. Entonces $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.

m.c.m. y m.c.d.

Definición: m.c.m. y m.c.d.

El **m.c.m.** es el menor múltiplo común (distinto de 0). El **m.c.d.** es el mayor divisor común.

Regla: con factores primos

Para el m.c.m. se toman todos los primos con el mayor exponente. Para el m.c.d. se toman solo los comunes con el menor exponente.

Ejemplo 3

Calcula el m.c.m. y el m.c.d. de 12 y 18.

$12 = 2^2 \times 3$ y $18 = 2 \times 3^2$. m.c.m. $= 2^2 \times 3^2 =$ **36**. m.c.d. $= 2 \times 3 =$ **6**.

Ejemplo 4

Quiero repartir 24 galletas y 36 caramelos en bolsas iguales sin que sobre nada. ¿Cuál es el máximo de bolsas?

Es el m.c.d. de 24 y 36 = **12 bolsas**.

Ejemplo 5

Dos luces parpadean cada 4 y cada 6 segundos. Si parpadean juntas ahora, ¿cuándo coinciden otra vez?

m.c.m.(4, 6) = **12 segundos**.

¡Atención!

El 1 no es primo y el 2 sí lo es. No confundas el m.c.d. (repartir) con el m.c.m. (coincidir).

Más criterios y la criba de Eratóstenes

Regla: otros criterios útiles

Un número es divisible por 6 si lo es por 2 y por 3 a la vez. Es divisible por 4 si sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4 (por ejemplo, 1 316 porque 16 = 4 · 4). Es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras en posición par y en posición impar es 0 o múltiplo de 11 (por ejemplo, 2 728: 2 + 2 = 4 y 7 + 8 = 15; 15 − 4 = 11).

Ejemplo 6

¿Es 4 860 divisible por 6? ¿Y por 4?

Acaba en 0, es par: divisible por 2. La suma de cifras es 4 + 8 + 6 + 0 = 18, múltiplo de 3: divisible por 3. Como lo es por 2 y por 3, es divisible por 6. Por 4: las dos últimas cifras forman 60 = 4 · 15, así que también es divisible por 4.

Método: la criba de Eratóstenes

1. Escribe los números del 2 al 50.
2. Rodea el 2 y tacha todos sus múltiplos.
3. Rodea el siguiente número sin tachar (el 3) y tacha sus múltiplos.
4. Repite con 5 y con 7; los que queden sin tachar son los números primos hasta 50.

La relación entre m.c.m. y m.c.d.

Propiedad: producto de m.c.m. y m.c.d.

Para dos números naturales a y b se cumple siempre: $\text{m.c.m.}(a, b) \cdot \text{m.c.d.}(a, b) = a \cdot b$. Por ejemplo, con 12 y 18: m.c.m. = 36 y m.c.d. = 6; 36 · 6 = 216 y 12 · 18 = 216. Si el m.c.d. de dos números es 1 se dice que son **primos entre sí** y su m.c.m. es el producto.

Ejemplo 7

Calcula el m.c.m. de 8 y 12 con la propiedad anterior.

m.c.d.(8, 12) = 4. m.c.m. = (8 · 12) : 4 = 96 : 4 = 24. Se comprueba con los múltiplos: 24 es el primero común de ambos.

Ejemplo 8

Una frutera quiere colocar 40 peras y 56 manzanas en cestas iguales, sin que sobre nada y con el mayor número de cestas. ¿Cuántas cestas son y qué lleva cada una?

Hay que repartir: es el m.c.d. $40 = 2^3 \cdot 5$ y $56 = 2^3 \cdot 7$; m.c.d. $= 2^3 = 8$ cestas. Cada cesta lleva $40 : 8 = 5$ peras y $56 : 8 = 7$ manzanas.

Ejemplo 9

Dos barcos zarpan hoy del mismo puerto; uno vuelve cada 8 días y el otro cada 10. ¿Cuándo volverán a coincidir en puerto?

Es una coincidencia: se usa el m.c.m. $8 = 2^3$ y $10 = 2 \cdot 5$; m.c.m. $= 2^3 \cdot 5 = 40$. Volverán a coincidir dentro de 40 días.

¡Atención! Errores frecuentes

- Pensar que el 1 es primo o que el 2 no lo es.
- Calcular el m.c.m. tomando los factores comunes con menor exponente: eso es el m.c.d.
- Olvidar algún factor no común al calcular el m.c.m.
- Confundir los problemas de reparto (m.c.d.) con los de coincidencia (m.c.m.).

¿Sabías que...?

Eratóstenes de Cirene (siglo III a. C.), bibliotecario de Alejandría, midió el tamaño de la Tierra y además inventó la criba para encontrar números primos. Hoy los números primos muy grandes protegen los pagos por Internet y las claves de los móviles. Los números perfectos 6 y 28 ya fascinaban a los griegos.

El consejo de Otto

Reparto = m.c.d. Coincidencia = m.c.m. Pregúntate qué te piden y elige.